II. ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ

пII.1 Движение любого тела вызывается или изменяется в результате его взаимодействия с другими телами. Законы динамики устанавливают связь между движением тел и причинами, которые вызвали или изменили это движение.

В начале XVII века Галилеем были проведены тщательные опыты, которые позволили сделать следующий вывод: *если на тело нет внешних воздействий, то оно сохраняет покой или движется с постоянной скоростью*. Это утверждение составляет основу I-го закона динамики.

Свойство тел сохранять свою скорость при отсутствии действия на него других тел и менять ее лишь под действием других тел называется *инерцией*. Поэтому первый закон Ньютона получил название закона инерции. В настоящее время он формулируется так: *существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых изолированное тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя*. Изолированными называются тела, на которые не действуют другие тела.

пII.2 Второй закон Ньютона устанавливает связь между всеми действующими на тело силами и ускорением, которое получает тело в результате этого взаимодействия.

Ускорение точечного тела $\vec{a}$ пропорционально действующей на него силе $\vec{F}$ и обратно пропорционально массе тела m, т. е.

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

При наличии нескольких сил, действующих на тело, это соотношение записывается

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i / m, \qquad \text{или} \qquad m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Последняя запись используется чаще. Она гласит: *результирующая всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на ускорение.* Это соотношение называют вторым законом Ньютона или основным уравнением динамики.

пII.3 Третий закон Ньютона указывает на тела, со стороны которых действует та или иная сила. Он формулируется так: *силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению; эти силы направлены вдоль одной прямой* ($\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$), т. е. силы всегда возникают попарно: всякой силе, приложенной к какому-либо телу, можно сопоставить равную ей по величине и противоположно направленную силу, приложенную к другому телу. Эти силы не могут уравновешивать друг друга, потому что приложены к разным телам.

пII.4 При упругой деформации растяжения (или сжатия) величина деформации прямо пропорциональна модулю силы упругости. Это отражается законом Гука

$$\vec{F}_{упр} = -k\,\Delta\vec{x}, \text{ или } \left|\vec{F}_{упр}\right| = k\left|\Delta\vec{x}\right|.$$

пII.5 При движении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление движению, называемое трением. Силы трения действуют вдоль поверхности тел при их непосредственном соприкосновении. Различают два вида трения: сухое трение, возникающее между сухими поверхностями твердых тел, и вязкое трение – трение о жидкую и газообразную среду. При изучении сухого трения выделяют две его разновидности: трение покоя и трение скольжения.

Трение, действующее между двумя неподвижными друг относительно друга телами, называют трением покоя. Сила трения покоя зависит от приложенной к телу силы и меняется от нуля до максимального значения $F_{\text{тр max}}$, т. е. $0 \le F_{\text{тр max}} \le \mu N$, где μ коэффициент трения, а N – сила нормального давления.

Сила трения покоя направлена в сторону, противоположную возможному движению. При достижении силой трения покоя максимального своего значения тело начинает скользить. В этом случае действует сила трения скольжения. Она равна $F_{\text{тр. ск}} = \mu N$ и не зависит от скорости движения.

пII.6 При движении тела в жидкой или газообразной среде возникает сила вязкого трения. Сила вязкого трения появляется только при относительном движении тела, т. е. сила трения покоя в жидкости или газе отсутствует. Кроме того, сила вязкого трения зависит от скорости: при малых скоростях движения эта зависимость меняется по закону

$\vec{F}_{\text{тр. в}} = -\mu\vec{v}$, где μ – коэффициент вязкого трения.

Он зависит от среды, формы и размеров тела, температуры, давления.

пII.7 Вес тела – сила, с которой тело вследствие его притяжения Землей действует на опору или растягивает подвес. Вес тела определяется совокупностью действующих на тело сил и существенно зависит от ускорения, с которым движется опора (или подвес).

Для успешного решения задач с использованием законов Ньютона предлагается следующая последовательность действий, некий алгоритм.

1. Прежде всего необходимо внимательно прочитать условие задачи, нарисовать рисунок – это позволит яснее представить задачу.

2. Поскольку движение тела определяется *всеми* действующими на тело силами, то необходимо на рисунке к задаче стрелочками указать все силы, действующие на тело.

Очень полезно отчетливо представить, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы. Это поможет сделать третий закон Ньютона.

3. Далее второй закон Ньютона небходимо записать в векторной форме

$$\vec{F}_{\text{р}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a}\ .$$

4. Затем нужно выбрать направление осей $0X$ и $0Y$ (обычно эти направления диктуются условиями задачи) и перейти к записи второго закона Ньютона для проекций на оси координат.

5. Если в задаче кроме сил и ускорений требуется определить координаты, расстояния или скорости, то кроме законов Ньютона нужно использовать еще и кинематические уравнения.

6. Записав систему уравнений для данной задачи, необходимо проследить за тем, чтобы общее число уравнений равнялось числу неизвестных. Решение задачи нужно получить в общем виде. Это позволит провести анализ решения, т. е. увидеть, как меняются найденные величины от условий задачи.

7. После этого в полученные формулы нужно подставить цифровые данные.

Примеры решения задач

Задача II.1 В движущемся лифте на динамометре висит груз массой $m = 1$ кг. При этом показания динамометра $F = 15H$. Определить ускорение лифта и направление его движения. Чему равен вес груза P?

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения пружины $\vec{F}$ (показание динамометра). При установившемся движении груз имеет то же ускорение, что и лифт (*рис. II.1*). Второй закон Ньютона для груза имеет вид (II.2)

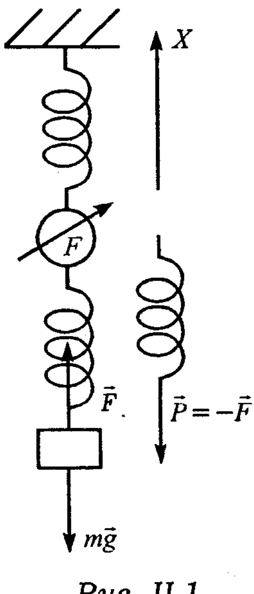

Рис. II.1

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Ось $0X$ направим вверх. Запишем закон Ньютона в проекции на эту ось $F - mg = ma$. Отсюда

$$a = \frac{F - mg}{m} = \frac{15H - 9{,}8H}{1\,кг} = 5{,}2\ м/с^2.$$

Ускорение имеет положительный знак, значит, оно направлено вверх. Определить направление движения груза при заданном условии задачи мы не можем! *О направлении движения тела можно судить только по направлению скорости*, которая определяется формулой

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Поэтому лифт может в условии нашей задачи двигаться вверх ускоренно (если его начальная скорость $\vec{v}_0$ направлена вверх) либо вниз замедленно (если его начальная скорость $\vec{v}_0$ направлена вниз). И только в том случае, когда начальная скорость тела равна нулю, направление движения совпадает с направлением ускорения $\vec{a}$.

Теперь определим вес груза P.

Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес. При взаимодействии пружины с грузом m на него действует сила $\vec{F}$. Тело по третьему закону Ньютона действует на пружину (вертикальный подвес) с силой $\vec{P} = -\vec{F}$. Поэтому вес тела по величине равен силе F, но направлен вниз (рис. II.1). Таким образом, вес тела $P = F = 15H$.

Как видно, вес тела в условии нашей задачи больше силы тяжести, действительно:

$mg = 1\text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м/с} = 9{,}8H < P = 15H.$

Задача II.2 Два груза с массами m_1 и m_2, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на идеально гладком столе. К телу массы m_2 приложена сила $\vec{F}$. С каким ускорением движутся тела? Каково натяжение нити $\vec{T}$?

Решение. Укажем стрелочками все силы, действующие на каждый из грузов.

На тело массы m_1 действуют три силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. На тело массы m_2 действуют четыре силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_2$, сила натяжения нити $\vec{T}_2$ и сила $\vec{F}$ (*рис. II.2, а*).

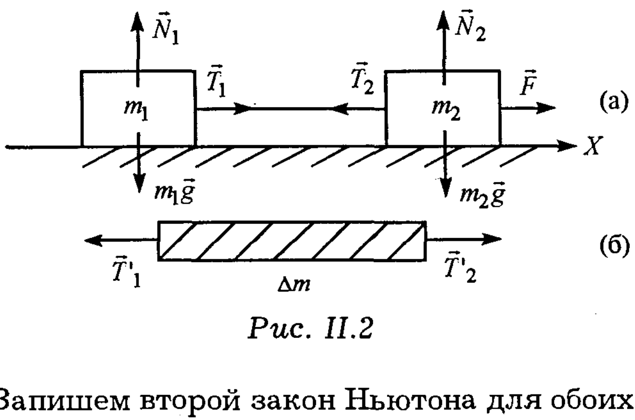

Рис. II.2

Запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1;\ \ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2.$$

Направим ось $0X$ вдоль направления силы $\vec{F}$ и перепишем закон Ньютона в проекциях на эту ось:

$T_1 = m_1 a_1;\;\; F - T_2 = m_2 a_2.$

Мы получили два уравнения с четырьмя неизвестными, поэтому нужны еще дополнительные уравнения. Одно из них мы получим из условия нерастяжимости нити. В этом случае оба конца нити за любой промежуток времени совершают равные перемещения, т. е.

$$\Delta x_1 = \frac{a_1 t^2}{2} \quad \text{и} \quad \Delta x_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

так как $\Delta x_1 = \Delta x_2$, то $a_1 = a_2 = a$.

Условие невесомости нити позволяет найти связь между силами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. По третьему закону Ньютона на концы веревки действует сила $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$ (*рис. II.2, б*). В проекции на ось $0X$ уравнение Ньютона для нити можно записать:

$T_2' - T_1' = \Delta m a$, но так как нить невесома $(\Delta m = 0)$, то $T_2' - T_1' = 0$, или $T_2' = T_1' = T$, т. е. невесомая нить действует на грузы m_1 и m_2 с равными по величине, но противоположно направленными силами.

Таким образом, уравнения движения для грузов вдоль оси $0X$ запишутся:

$T = m_1 a;\;\; F - T = m_2 a.$

Складывая эти уравнения, получим

$F = (m_1 + m_2)a$, или $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, а сила натяжения $T = m_1 a = \dfrac{mF_1}{m_1 + m_2}$.

Задача II.3 Тело массой m движется по идеально гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Найти ускорение $\vec{a}$ тела и его вес.

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}$ (*рис. II.3*). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

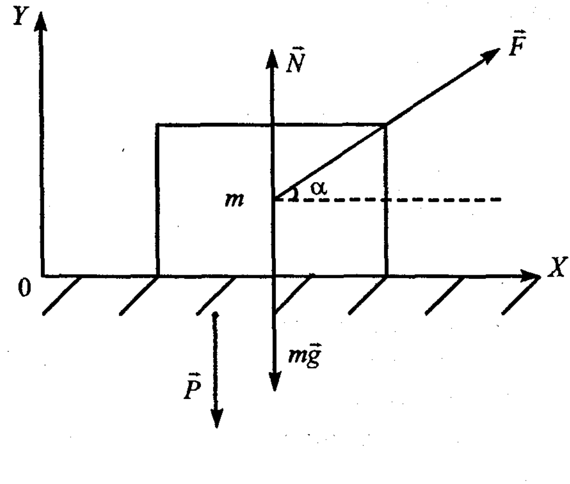

Рис. II.3

Так как тело движется вдоль горизонтальной плоскости, ось $0X$ направим, как показано на рисунке, а ось $0Y$ – перпендикулярно к ней. Тогда закон Ньютона в проекциях на оси координат запишется соответственно

$$F\cos\alpha = ma_x = ma;$$

$$-mg + N + F\sin\alpha = ma_y = 0.$$

Из первого соотношения определяем ускорение

$$a = \frac{F\cos\alpha}{m}.$$

Вес тела $\vec{P}$ (сила, с которой тело действует на плоскость) численно равен силе, с которой плоскость действует на тело (силе $\vec{N}$) по третьему закону Ньютона, т.е. $\vec{N}=-\vec{P}$ или $\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{P}\right|$. Силу $\vec{N}$ легко определить из уравнения движения, записанного вдоль оси $0Y$:

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Следовательно, вес тела $P = mg - F\sin\alpha$. Эта сила приложена к плоскости (*рис. II.3*). Как видно, вес тела меньше силы тяжести.

Задача II.4 На гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, находится тело массой m. Определить ускорение тела $\vec{a}$, реакцию опоры $\vec{N}$ и результирующую силу $\vec{F}_{\text{р}}$, действующую на тело.

Решение. На тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}$. Результирующая этих двух сил заставляет тело двигаться вдоль наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$. Второй закон Ньютона запишется

$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{F}_{\text{р}} = m\vec{a}.$$

Так как тело перемещается вдоль наклонной плоскости, то ось $0X$ направим вдоль наклонной плоскости вниз, а ось $0Y$ — перпендикулярно к ней (*рис. II.4, а*). Тогда уравнение Ньютона в проекциях на эти оси запишется

$$mg\sin\alpha = ma_x; \;\; N - mg\cos\alpha = 0.$$

Следовательно, $a = g\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$, а

$$\left|\vec{F}_{\text{р}}\right| = \left|m\vec{a}\right| = mg\sin\alpha.$$

Однако хочу обратить ваше внимание на то, что реакция опоры $\vec{N}$ при движении тел вдоль наклонной плоскости зависит от условия задачи.

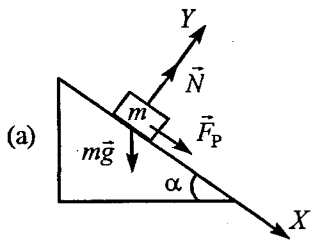

Рис. II.4

Изменим задачу. Пусть тело массой m находится на той же плоскости, но теперь наклонную плоскость перемещаем с ускорением $\vec{a}$ вдоль горизонтальной поверхности так, чтобы тело на ней покоилось. Вновь определим величину и направление результирующей силы $\vec{F}_{\text{р}}$ и реакцию опоры $\vec{N}$.

Решение. На тело по-прежнему действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}_1$. Второй закон Ньютона записывается

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 = m\vec{a} \cdot$$

Тело массы m покоится на наклонной плоскости, но относительно Земли оно вместе с наклонной плоскостью перемещается с ускорением $\vec{a}$. Следовательно, результирующая сила $\vec{F}_р$ направлена в ту же сторону, что и ускорение $\vec{a}$ (*рис. II.4*, *б*). Можно вновь записать уравнение движения вдоль осей $0X$ и $0Y$ и определить силы $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{р1}$. Но мы предложим другой способ решения. Величину результирующей силы $\vec{F}_{р1}$ определим из прямоугольного треугольника ABC

$$F_{р1} = mg \ \operatorname{tg}\alpha .$$

Сила реакции опоры N_1 вычисляется из того же треугольника $N_1 = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

(б)

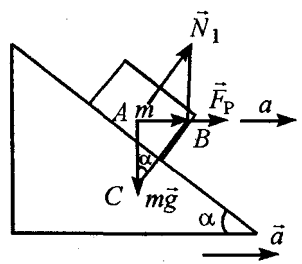

Рис. II.4

Как видно, сила $\vec{F}_{р1}$ отличается и по величине, и по направлению от силы $\vec{F}_р$, а реакция опоры $\vec{N}_1$ отличается от силы $\vec{N}$ только по величине.

Задача II.5 На тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, установлен стержень с подвешенным на нити шариком массой m. Определить силу натяжения нити $\vec{T}$, если плоскость образует с горизонтом угол α.

Решение. Предположим, что при установившемся движении (шарик и тележка движутся с ускорением $\vec{a}$) шарик отклонился от перпендикуляра к наклонной плоскости на угол β (*рис. II.5*).

Второй закон Ньютона для шарика имеет вид:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Выберем ось $0X$ вдоль наклонной плоскости, а ось $0Y$ – перпендикулярно к ней. Тогда второй закон Ньютона в проекциях на оси координат запишется

$$T\sin\beta + mg\sin\alpha = ma;$$

$$T\cos\beta - mg\cos\alpha = 0.$$

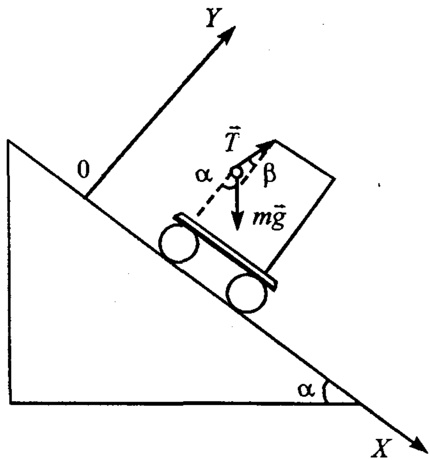

Рис. II.5

При установившемся движении все точки тележки, нить и шарик движутся с одним и тем же ускорением $a = g\sin\alpha$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $T\sin\beta = 0$. Так как $T \neq 0$, то $\sin\beta = 0$. Следовательно, угол β=0. Это значит, что нить с шариком располагается перпендикулярно наклонной плоскости.

Задача II.6 На одном конце веревки, переброшенной через невесомый блок, находится груз массой m, а на другом – человек массой $M = 2m$.

Человек поднимается вверх с ускорением относительно веревки $\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g}$ (*рис. II.6*). Каково его ускорение относительно Земли?

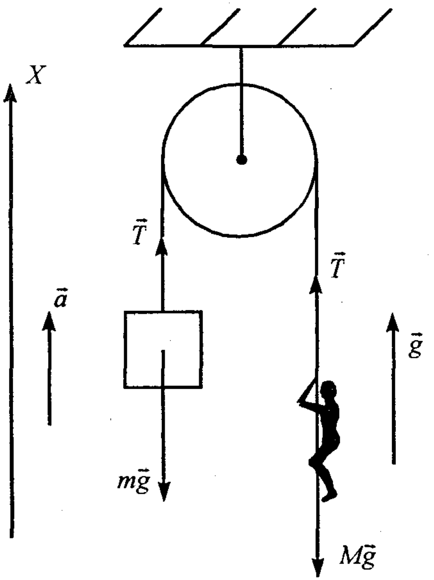

Рис. II.6

Решение. На груз и человека действуют вдоль вертикали по две силы: сила тяжести и натяжение веревки. Выберем положительное направление оси $0X$, направленное вверх. Тогда для обоих тел второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется: $T - mg = ma$;

$$T - Mg = Ma_{\text{абс}} = M(g - a).$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$-Mg + mg = M(g - a) - ma, \text{ или}$$

$$-2mg + mg = 2mg - 2ma - ma, \text{ или}$$

$$3mg = 3ma.$$

Следовательно, $a = g$. Таким образом, груз массой m движется вверх с ускорением g, а человек относительно Земли движется с ускорением $a_{\text{абс}} = g - a = 0$, т. е. относительно Земли человек движется равномерно.

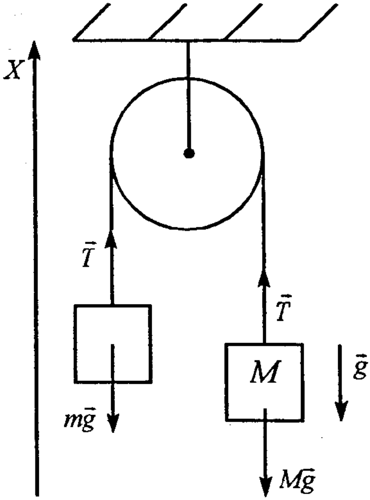

Рис. II.7

Задача II.7 На одном конце нити, перекинутой через невесомый блок, подвешен груз массой $m = 1$ кг. На другом ее конце осторожно подвешен груз массой $M = 1000$ кг. Какова сила натяжения нити?

Решение. Так как масса груза M в тысячу раз больше массы груза m, то можно считать, что грузы с нитью движутся с ускорением g. Выбрав положительное направление оси $0X$, как показано на *рис. II.7*, можно записать второй закон Ньютона вдоль этого направления для груза массой m: $T - mg = mg$.

Следовательно, натяжение нити

$$T = 2mg = 19{,}6H.$$

Задача II.8 На невесомых блоках, изображенных на *рис. II.8*, подвешены грузы массой m_1 и m_2 $(m_1 > m_2)$. Определить натяжение нити $\vec{T}$.

Решение. На рисунке стрелочками нарисованы все силы, которые действуют на тело массой m_1, подвижный блок и тело массой m_2. Выберем ось $0X$, направленную вниз. Тогда закон Ньютона для тел запишется

$$m_1 g - T = m_1 a_1;$$
$$T_1 - T - T = m_{бл} a_2 = 0 \ (\text{т. к.} \quad m_{бл} = 0);$$
$$m_2 g - T_1 = -m_2 a_2.$$

Поскольку $m_1 > m_2$, то тело массой m_1 движется вниз, а тело массой m_2 – вверх. Из второго уравнения следует $T_1 = 2T$, и уравнения Ньютона запишутся

$$m_1 g - T = m_1 a_1; \ m_2 g - 2T = -m_2 a_2.$$

Мы имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Недостающее уравнение можно найти, используя кинематические связи. Связь между ускорениями a_1 и a_2 определяется из следующих соображений. Если тело массой m_1 опустится на высоту h_1, то второе тело поднимется за это время на высоту $h_2 = \frac{h_1}{2}$. Так как пройденные расстояния прямо пропорциональны ускорениям, то $a_2 = \frac{a_1}{2}$. Теперь уравнения движения будут выглядеть:

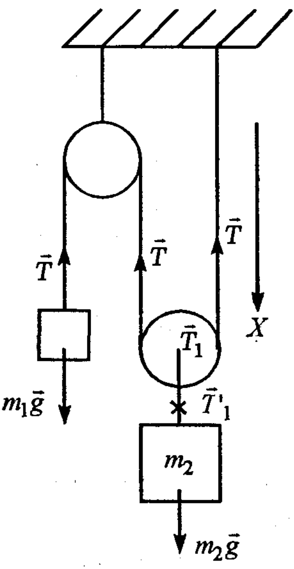

Рис. II.8

$$m_1 g - T = m_1 a_1;$$

$$m_2 g - 2T = -\frac{m_2 a_1}{2}.$$

Решая эту систему, получим

$$a_1 = \frac{2m_1 g - m_2 g}{2m_1 + {}^{m_2}\!/_{2}}, \text{ или } a_1 = \frac{2g(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2};$$

$$T = m_1 g - m_1 a = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}; \; a_2 = \frac{a_1}{2} = g\frac{(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}.$$

Задача II.9 Два груза массой M связаны нитью, перекинутой через невесомый неподвижный блок. На один из грузов кладут перегрузок m (*рис. II.9*). С каким ускорением $\vec{a}$ движутся грузы? Каков вес перегрузка m?

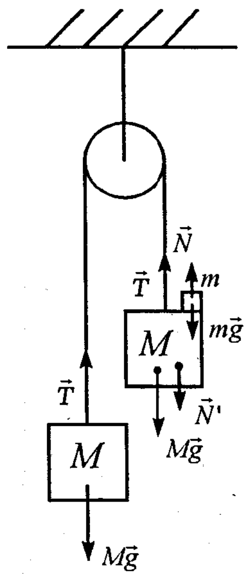

Рис. II.9

Решение. Изобразим стрелочками силы, действующие на все тела. Направим ось $0X$ вниз и запишем уравнение Ньютона для каждого из трех грузов:

$$Mg - T = (-Ma);$$
$$Mg - T + N' = Ma;$$
$$mg - N = ma.$$

Отметим, что сила $\vec{N}$ — это сила, которая действует на тело массой m со стороны тела массой M (т. е. реакция опоры). Сила $\vec{N}'$ —это сила, которая действует на тело массой M со стороны маленького тела m, т. е. это и есть вес тела массой m. По третьему закону Ньютона $\vec{N} = -\vec{N}'$, а по величине эти силы равны друг другу. Из третьего уравнения системы

$$N = mg - ma = m(g - a),$$

т. е. видно, что вес тела массой m меньше силы тяжести.

Решая систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим

$$a = \frac{mg}{2M + m}; T = \frac{2M(M + m)g}{2M + m}; N = N' = \frac{2Mmg}{2M + m}.$$

Задача II.10. Шайба, скользящая по горизонтальной поверхности, остановилась, пройдя расстояние S. Определить начальную скорость $\vec{v}_0$ шайбы, если коэффициент трения равен μ (*рис. II.10*).

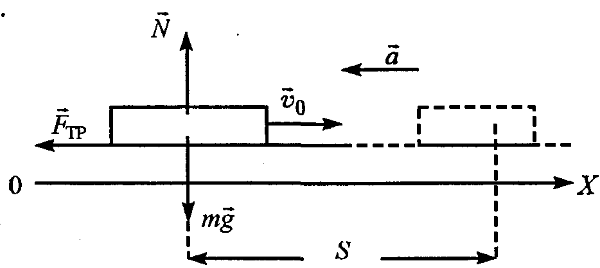

Рис. II.10

Решение. На шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Выберем ось $0X$ по направлению движения. Второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$-F_{тр} = ma, \text{ или } -\mu mg = ma, \text{ т.е. } a = -\mu g.$$

Из этого уравнения видно, что ускорение шайбы $\vec{a}$ направлено в сторону, противоположную движению. Следовательно, шайба движется замедленно. Для определения начальной скорости v_0 необходимо записать еще уравнение кинематики для скорости $v(t) = v_0 - at$. Так как шайба, пройдя расстояние S остановилась, то $0 = v_0 - at_1$, т. е. $v_0 = at_1$. Время движения шайбы не задано в условии задачи, но его можно определить из выражения для перемещения

$$\Delta x = S = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = \frac{2v_0 t_1 - v_0 t_1}{2} = \frac{v_0 t_1}{2}, \text{ или}$$

$t_1 = \dfrac{2S}{v_0}$. Подставив это выражение в уравнение для скорости, получим

$$v_0 = at_1 = \mu g \frac{2S}{v_0}, \text{ откуда}$$

$$v_0^2 = 2S\mu g, \text{ или } v_0 = \sqrt{2S\mu g}.$$

Задача II.11 На наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой m_1=1кг, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити висит груз с массой m_2=3 кг (*рис. II.11*). Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}1$. Определить ускорение $\vec{a}$ грузов.

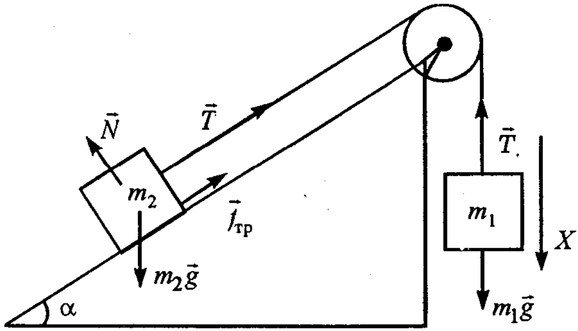

Рис. II.11

Решение. На тело массой m_1 действуют две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{T}$. На тело массой m_2 действуют четыре силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, натяжение нити $\vec{T}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. Закон Ньютона в векторной записи для обоих тел имеет вид

$$m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a};\ m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}_{тр} = m_2\vec{a}.$$

При переходе к записи этих уравнений для проекций на направление движения остается неясным, куда происходит движение, куда направить силу трения?

Мы должны помнить, что сила трения может замедлить движение, может его вовсе остановить, но изменить движение на обратное сила трения *не может*. Поэтому достаточно решить в таком случае задачу без учета силы трения, определить ускорение движения. Его знак укажет направление движения, поскольку вначале тела покоились. Затем следует вновь решить задачу, но уже с учетом силы трения.

Итак, выберем направление движения груза m_1 вниз. Тогда уравнения движения грузов для проекций на направление движения (без учета силы трения) запишутся

$$m_1 g - T = m_1 a; \; T - m_2 g \sin\alpha = m_2 a.$$

Сложив оба уравнения, получим

$$m_1 g - m_2 g \sin\alpha = (m_1 + m_2) a, \text{ или}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = -1{,}25\,\text{м/с}^2.$$

Знак «—» указывает на то, что ускорение направлено в сторону, противоположную той, которую мы выбрали, и поэтому силу трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ нужно направить вдоль наклонной плоскости вверх. Теперь запишем уравнения Ньютона вдоль истинного направления движения, но с учетом силы трения

$$T - m_1 g = m_1 a_1; \; -f_{тр} - T + m_2 g \sin\alpha = m_2 a_1 .$$

Сложим эти уравнения и, подставив значение силы трения $f_{тр} = \mu N = \mu m_2 g \cos\alpha$, получим

$$a_1 = \frac{g\left[m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1\right]}{m_1 + m_2} = 0{,}6\ м/с^2 .$$

Задача II.12 Тело начинает движение вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $\vec{v}_0$. С какой скоростью $\vec{v}_1$ тело вернулось в начало наклонной плоскости? Коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg}\ \alpha$. (*рис. II.12*)

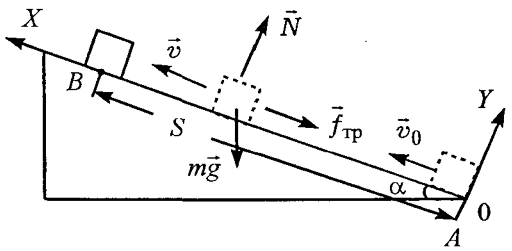

Рис. II.12

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. При движении тела вверх и вниз сила трения направлена в разные стороны. Тело движется вверх, останавливается в некоторой точке *B* и возвращается в точку *A*. Выберем начало координат в точке A и ось $0X$ направим вверх вдоль наклонной плоскости. Второй закон Ньютона вдоль направления оси $0X$ запишется

$-mg\sin\alpha - f_{\text{тр}} = ma_1$ – при движении тела вверх;

$-mg\sin\alpha + f_{\text{тр}} = ma_2$ – при движении тела вниз.

Ускорения a_1 и a_2 из этих соотношений равны

$$a_1 = -\frac{(mg\sin\alpha + f_{\text{тр}})}{m} = -\left(g\sin\alpha + {}^{\mu N}\!/_{m}\right);$$

$$a_2 = \frac{f_{\text{тр}} - mg\sin\alpha}{m} = \frac{\mu N}{m} - g\sin\alpha.$$

Выражение для силы $\vec{N}$ легко получить, записав уравнение Ньютона вдоль оси $0Y$, направленной перпендикулярно к оси $0X$:

$$N - mg\cos\alpha = 0, \quad \text{или} \quad N = mg\cos\alpha.$$

Двигаясь вверх с ускорением a_1, тело достигнет точки B через некоторое время t_1 и пройдет расстояние S. В точке B его скорость обратится в нуль, поэтому

$$v(t_1) = v_0 - |\vec{a}_1|t_1 = 0, \text{ или } t_1 = \frac{v_0}{|\vec{a}_1|} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

$$S = v_0 t_1 - \frac{|\vec{a}_1|t_1^2}{2} = \frac{2v_0 t_1 - v_0 t_1}{2} = \frac{v_0 t_1}{2}.$$

После остановки в точке B тело начнет двигаться вниз с нулевой начальной скоростью и пройдет до точки A то же расстояние S, но двигаться будет ускоренно, поэтому

$$S = \frac{|\vec{a}_2| t_2^2}{2}, \quad \text{или} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2S}{a_2}} = \sqrt{\frac{v_0 t_1}{a_2}}.$$

Зная время движения тела вниз t_2, легко определить скорость в конце движения (в точке A)

$$v_1 = v(t_2) = |\vec{a}_2| t_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 a_2}{a_1}} = v_0 \sqrt{\frac{\mu \cos\alpha - \sin\alpha}{\mu \cos\alpha + \sin\alpha}}.$$

Как видно из полученного соотношения, v_1 будет меньше начальной скорости движения v_0. Это и понятно: часть начальной энергии, которую сообщили телу в точке A, тратится на работу против силы трения.

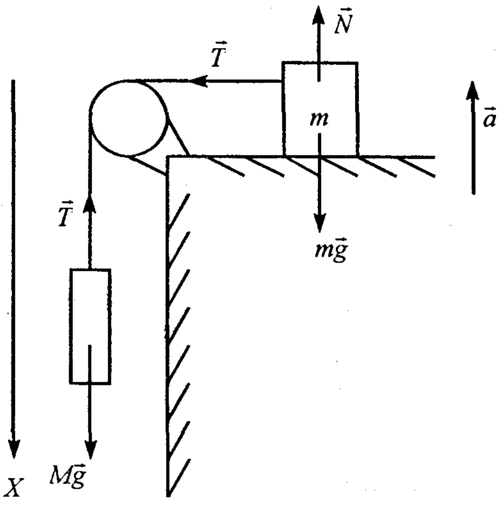

Рис. II.13

Задача II.13

Груз массой M связан нитью с грузом m, лежащем на гладком горизонтальном столе, помещенном в лифте. Лифт движется с ускорением $\vec{a}$ (*рис. II.13*). Определить натяжение нити T. Масса $m < M$.

Решение. Изобразим стрелочками все силы, действующие на тело, и запишем второй закон Ньютона для каждого тела в отдельности:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = (\vec{a}_1 + \vec{a}),$$

где $\vec{a}_1$ — ускорение, с которым перемещается тело массой m вдоль горизонтальной плоскости стола;

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_2,$$

где $\vec{a}_2$ — ускорение тела M относительно Земли, причем $a_2 = a_1 - a$.

Выберем ось $0X$, направленную вниз, тогда уравнение Ньютона можно записать для тела массой M вдоль этого направления

$$Mg - T = M(a_1 - a),$$

а для тела массой m вдоль горизонтальной поверхности стола

$$T = ma_1$$

(относительно стола груз массой M движется с тем же ускорением, что и груз массой m).

Решая эти уравнения, определим натяжение нити

$$T = \frac{Mm(g + a)}{M + m}.$$

Задача II.14 На горизонтально расположенном стержне длиной $2l$ надета бусинка массой m, которая может без трения перемещаться вдоль стержня. Стержень поступательно движется с ускорением $\vec{a}$ в горизонтальной плоскости в направлении, составляющем угол α со стержнем (*рис. II.14*). Определить ускорение бусинки относительно стержня, силу реакции со стороны стержня и время, через которое бусинка покинет стержень.

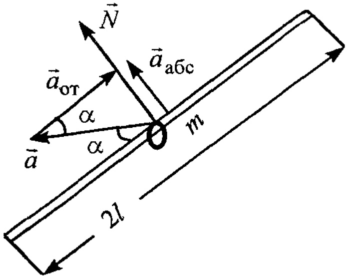

Рис. II.14

Решение. В горизонтальной плоскости на бусинку действует только одна сила — сила реакции стержня $\vec{N}$, перпендикулярная стержню. Поэтому абсолютное ускорение бусинки $\vec{a}_{абс}$ — ускорение относительно Земли — будет в силу второго закона Ньютона направлено в ту же сторону. Относительное ускорение бусинки $\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{абс} - \vec{a}_{пер}$, как видно из рисунка, направлено вдоль стержня. Из треугольника ускорений следует: $a_{абс} = a\sin\alpha$; $a_{отн} = a\cos\alpha$. Согласно второму закону Ньютона

$$N = ma_{абс} = ma\sin\alpha.$$

Время движения бусинки вдоль стержня t_0 определяется из уравнения

$$l = \frac{a_{отн}t_0^2}{2}, \text{ или } t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a_{отн}}} = \sqrt{\frac{2l}{a\cos\alpha}}.$$

Задача II.15 От поезда массой M, движущегося с постоянной скоростью, отцепляется последний вагон массой m, который проходит путь S и останавливается. На каком расстоянии L находится поезд от вагона в момент остановки последнего? Сила тяги поезда остается постоянной (*рис. II.15*).

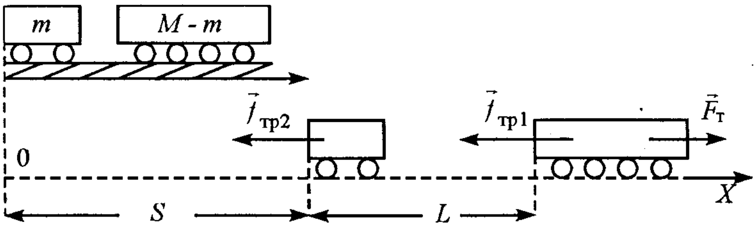

Рис. II.15

Решение. Вначале вдоль горизонтального направления на поезд действовали две силы: сила тяги $\vec{F}_т$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$, причем, так как он двигался равномерно, то $F_т - f_{тр} = 0$, или $F_т = f_{тр} = \mu Mg$. Уравнения Ньютона для поезда и вагона после отрыва вдоль направления движения запишутся:

$$F_т - f_{тр1} = (M - m)a_1, \text{или } \mu Mg - \mu(M - m)g = (M - m)a_1,$$

$$\text{т. е.} \quad a_1 = \frac{\mu mg}{M - m};$$

$$-f_{тр2} = ma_2, \text{или } -\mu mg = ma_2, \text{т. е. } a_2 = -\mu g.$$

После отрыва вагона поезд станет двигаться ускоренно с ускорением a_1, а вагон — замедленно с ускорением a_2. Их скорости относительно Земли будут меняться по закону

$$v_1(t) = v_0 + a_1 t\ ; \qquad v_2(t) = v_0 - a_2 t\,.$$

Однако значение v_0 в условии задачи не задано. Попробуем обойтись без него, выбрав удобную систему отсчета. Если мы выберем систему отсчета, которая движется со скоростью $\vec{v}_0$, то в ней поезд движется ускоренно со скоростью

$v_1' = v_1 - v_0 = v_0 + a_1 t - v_0 = a_1 t$, а вагон — со скоростью

$v_2' = v_2 - v_0 = v_0 - a_2 t - v_0 = -a_2 t$, т. е. вагон в этой же системе тоже движется ускоренно, но в обратную сторону. Когда его скорость в этой системе достигнет значения v_0, то относительно Земли он остановится, пройдя расстояние S (см. рис.). В системе отсчета, движущейся со скоростью v_0, вагон также пройдет расстояние S, но в обратную сторону. Расстояние L между вагоном и поездом можно найти, если будем знать ускорение поезда относительно вагона. Это ускорение равно $a_{отн} = a_1 - (-a_2) = a_1 + a_2$. Расстояние между поездом и вагоном L будет так относиться к расстоянию S, пройденному вагоном, как $\dfrac{a_{\text{отн}}}{|\vec{a}_2|}$, т. е.

$\dfrac{L}{S} = \dfrac{a_1 + a_2}{a_2}$. Таким образом,

$$L = S\,\frac{(a_1 + a_2)}{a_2} = S\,\frac{\dfrac{\mu m g}{M - m} + \mu g}{\mu g} = S\,\frac{M}{M - m}.$$

Задача II.16 По бруску массой M, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемому нитью, скользит равномерно тело массой m под действием силы $\vec{F}$. В некоторый момент нить пережигают. Определить силу трения между соприкасающимися поверхностями после пережигания нити (*рис. II.16*).

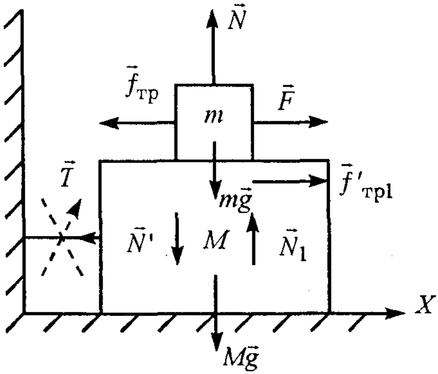

Рис. II.16

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела и бруска до пережигания нити

$$m\vec{g} + \vec{f}_{тр} + \vec{N} + \vec{F} = 0;$$

$$M\vec{g} + \vec{f}'_{тр} + \vec{N}_1 + \vec{N}' + \vec{T} = 0.$$

Вдоль горизонтального направления до пережигания нити на тело массой m действуют две силы: сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. Так как тело движется равномерно, то вдоль горизонтали можно записать

$$F - f_{тр} = 0\,, \qquad (1)$$

причем сила трения $f_{тр} = \mu N$ (тело скользит по поверхности бруска). После пережигания нити брусок массой M движется обязательно с некоторым ускорением $\vec{a}$, так как на него действует вдоль горизонтали единственная сила $f'_{тр}$, равная по величине по третьему закону Ньютона $f_{тр1}$. Это означает, что груз массой m также будет двигаться ускоренно, ибо он находится на бруске. Поэтому после пережигания нити уравнение движения для тела массой m имеет вид

$$F - f_{тр1} = ma_1. \qquad (2)$$

Если сравнить соотношения (1) и (2), то следует заметить, что сила $f_{тр1} < f_{тр} = \mu N$, поскольку сила $\vec{F}$ не изменилась. Значит, сила трения стала меньше максимального значения силы трения покоя, равного μN, а это значит, что сила $f_{тр1}$ является силой трения покоя.

Таким образом, тело массой m после пережигания нити относительно бруска будет покоиться, а относительно Земли — двигаться вместе с бруском с ускорением $\vec{a}$.

Запишем уравнения движения для тела массой m и бруска массой M после пережигания нити:

$$F - f_{тр1} = ma; \quad f_{тр1} = Ma.$$

Решая эти уравнения, получим

$$f_{тр1} = \frac{F \cdot M}{M + m}.$$

Задача II.17 Тележка массой M движется горизонтально без трения со скоростью $\vec{v}_0$. На передний край тележки без начальной скорости опускают тело массой m. При какой длине тележки l тело не соскользнет с нее? Коэффициент трения между тележкой и телом u. Размерами тела можно пренебречь (*рис. II.17*).

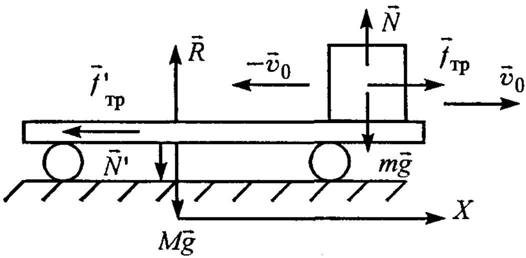

Рис. II.17

Решение. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. На тележку действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, реакция опоры $\vec{R}$, сила давления $\vec{N}'$ со стороны тела массой m и сила трения $f'_{тр}$, равная по величине по третьему закону Ньютона силе $\vec{f}_{тр}$. Запишем второй закон Ньютона в векторном виде для обоих тел:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}_{тр} = m\vec{a}_1;$$

$$M\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}'_{тр} + \vec{N}' = M\vec{a}_2,$$

где a_1 и a_2 – ускорения тела и тележки относительно Земли.

Выберем ось $0X$ совпадающей по направлению со скоростью $\vec{v}_0$. Тогда второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$f_{\text{тр}} = ma_1, \quad \text{или} \quad a_1 = \frac{f_{\text{тр}}}{m} = \mu g;$$

$$-f'_{\text{тр}} = Ma_2, \quad \text{или} \quad a_2 = -\frac{\mu mg}{M}.$$

Таким образом, ускорения a_1 и a_2 направлены в разные стороны, т. е. тело относительно Земли движется ускоренно, а тележка – замедленно. Скорость тела меняется по закону $v_1(t) = a_1 t$, а тележки – $v_2(t) = v_0 - a_2 t$. Если тележка достаточно длинная, то, очевидно, наступит такой момент времени, когда скорости тележки и тела станут равными относительно Земли. Это значит, что, начиная с этого времени, тело будет покоиться на тележке, так как его относительная скорость равна нулю. Обозначим этот момент времени t_0, тогда

$v_1(t) = v_2(t_0)$, или $a_1 t_0 = v_0 - a_2 t_0$, т. е.

$$t_0 = \frac{v_0}{a_1 + a_2}.$$

Как только тело остановится относительно тележки, сразу исчезает сила трения. С этого момента времени в горизонтальном направлении на тележку и тело силы не действуют, поэтому они движутся относительно Земли с постоянной скоростью.

За момент времени t_0 тело пройдет вдоль тележки некоторое расстояние S. Поэтому минимальная длина тележки, при которой тело еще не соскользнет, должна быть равна S, т. е. $l \geq S$.

Относительно тележки в начальный момент времени тело имеет скорость $-\vec{v}_0$, а ускорение тела относительно тележки в любой момент времени равно $a_{отн} = a_1 + a_2$. Поэтому расстояние S, пройденное телом относительно тележки, равно

$$S = -v_0 t_0 + \frac{(a_1 + a_2)t_0^2}{2} = -\frac{v_0^2}{2(a_1 + a_2)} = -\frac{Mv_0^2}{2\mu g(M + m)}.$$

Знак «—» указывает, что вдоль тележки тело перемещается влево.

Задача II.18 Брусок массой M лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит тело массой m. Коэффициент трения между телом и бруском равен μ. При каком значении силы $\vec{F}$, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску?

Решение. На тело массой m действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры со стороны бруска $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. На брусок массой M действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{R}$, сила трения $\vec{f}'_{тр} = -\vec{f}_{тр}$ и сила давления $\vec{N}' = -\vec{N}$ (*рис. II.18*). Выберем на-

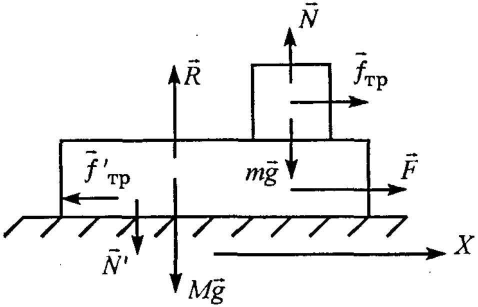

Рис. II.18

правление оси $0X$, совпадающей с направлением силы $\vec{F}$, и запишем второй закон Ньютона в проекции на это направление

$$f_{тр} = ma_1;\ F - f_{тр} = Ma_2.$$

При малом значении силы $\vec{F}$ проскальзывания может и не быть. В этом случае тело массой m движется как единое целое с бруском, а это значит, что ускорения относительно Земли у них одинаковы, т. е. $a_1 = a_2$. В этом случае сила трения $\vec{f}_{тр}$ является силой трения покоя и может меняться по величине от 0 до максимального значения $f_{тр\ max} = \mu N$. В нашей задаче величину силы трения покоя можно вычислить из соотношений

$$f_{тр\ п} = ma \text{ и } F - f_{тр\ п} = Ma.$$

Отсюда сила трения покоя $f_{тр\ п} = m\dfrac{F}{m+M}$.

Как видно из этого соотношения, с увеличением силы F увеличивается и сила трения покоя. Когда она достигнет максимального значения (в нашем случае $f_{\text{тр max}} = \mu mg$), то тело начнет скользить вдоль бруска. Следовательно, когда нет проскальзывания

$$f_{\text{тр}} \leq \mu mg, \quad \text{или} \quad \frac{mF}{M+m} \leq \mu mg.$$

Поэтому, если $F \leq \mu g(M+m)$, проскальзывания нет, если же $F > \mu g(M+m)$, возникает скольжение тела массой m вдоль бруска.

Следует обратить внимание, что для скольжения тела вдоль бруска нужно приложить силу не $F = \mu mg$, как обычно утверждают учащиеся, а $F \geq \mu(M+m)g$.

При скольжении тела вдоль бруска их ускорения относительно Земли разные. В этом случае второй закон Ньютона для тела и бруска запишется

$$f_{\text{тр}} = ma_1; \;\; F - f_{\text{тр}} = Ma_2,$$

где сила трения скольжения равна $f_{\text{тр}} = \mu mg$.

Из этих уравнений легко определить ускорения a_1 и a_2:

$$a_1 = \mu g, \quad a_2 = \frac{F - \mu mg}{M}.$$

Так как при скольжении тела $F > \mu g(M+m)$, то ускорение $a_2 > a_1$, а это значит, что ускорение тела относительно бруска будет равно

$$a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \mu g - \frac{F - \mu m g}{M} = \frac{\mu g(M + m) - F}{M}.$$

Эта величина отрицательная, так как $F > \mu g(M + m)$. Это означает, что относительное ускорение тела направлено в сторону, противоположную движению.

Задача II.19 На горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω, на расстоянии l от оси вращения лежит груз массой m. Определить силу $\vec{F}$, с которой платформа действует на груз.

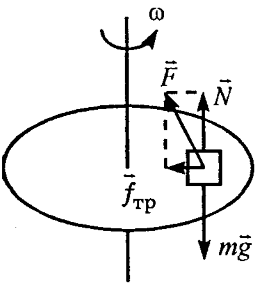

Рис. II.19

Решение. На груз массой m действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$ (*рис. II.19*). Сила трения направлена к центру, так как именно эта сила в горизонтальном направлении сообщает телу нормальное ускорение $a_n = \omega^2 l$. При этом сила трения $f_{\text{тр}} = m\omega^2 l$ является силой трения покоя, ибо тело покоится на платформе. Со стороны платформы на тело действуют две силы: сила трения покоя $\vec{f}_{\text{тр}}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Их результирующая $\vec{F} = \vec{N} + \vec{f}_{\text{тр}}$

является искомой силой. Величина этой силы определяется по теореме Пифагора

$$F = \sqrt{N^2 + f_{\text{тр}}^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\omega^2 l\right)^2}.$$

III. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА И ЭНЕРГИИ

§ 1. Изменение и сохранение импульса тела и системы тел

пIII.1 Изменение состояния движения тела, т. е. величины и направления скорости, определяется не только величиной действующей силы $\vec{F}$, но и длительностью ее действия. Это хорошо видно, если второй закон Ньютона записать в несколько иной форме:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \text{ или}$$

$$\sum \vec{F}_i \Delta t = m\Delta\vec{v} = m\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right),$$

где $\sum \vec{F}_i$ – сумма всех действующих на тело сил, а $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ соответственно конечная и начальная скорости тела. Вводя понятие импульса тела $\vec{p} = m\vec{v}$, получим

$$\Delta t \sum \vec{F}_i = \Delta\vec{p}. \qquad (1)$$

Таким образом, формула (1) утверждает, что