ной механической энергии системы равно нулю

$$\Delta E = \Delta E_{\text{К}} + \Delta E_{\text{П}} = 0. \qquad (9)$$

пIII.9 Если на систему тел действуют внешние силы или внутренние неконсервативные силы, то изменение полной механической энергии равно работе внешних сил и внутренних неконсервативных, т. е.

$$\Delta E = \Delta E_{\text{К}} + \Delta E_{\text{П}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр.неконс}}. \qquad (10)$$

§ 3. Центральный удар шаров

пIII.10 Центральным ударом называется такое взаимодействие тел, когда их скорости направлены вдоль линии, соединяющей их центры.

В механике обычно рассматривают два предельных вида взаимодействия тел: абсолютно упругое и абсолютно неупругое взаимодействия (абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары тел). Абсолютно упругий удар — это такое взаимодействие тел, при котором механическая энергия тел сохраняется. Величина и направление скоростей после взаимодействия определяется законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса.

Абсолютно неупругий удар — такое взаимодействие тел, после которого тела движутся вместе (как единое целое) с одинаковой скоростью. Скорость движения тел после неупругого столкновения определяется только законом сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии при абсолютно неупругом взаимодействии *не выполняется*, так как часть механической энергии тел при столкновении переходит в тепловую энергию, при этом сталкивающиеся тела нагреваются.

Для успешного решения задач на законы сохранения и изменения импульса тела и энергии предлагается следующая последовательность действий:

1. Внимательно прочитайте условие задачи, нарисуйте рисунок и на нем укажите стрелочками все действующие на тела силы.

2. Далее необходимо выбрать систему тел, взаимодействие которых вы желаете рассмотреть, и определить, является ли эта система замкнутой. Если система тел замкнута, то можно применить закон сохранения импульса (2), если же на систему действуют внешние силы, то нужно применить закон изменения импульса (1). Оба эти закона часто удобно использовать вдоль какого-либо направления.

3. Может случиться так, что одного закона сохранения импульса (или закона изменения импульса) недостаточно для решения задачи. Тогда можно еще использовать закон сохранения механической энергии. Однако в этом случае мало убедиться, что система тел, выбранная вами, замкнута. Нужно еще выяснить, являются ли внутренние силы консервативными. Если силы консервативны, то можно применять и закон сохранения механической энергии (9). Если же силы неконсервативны, то нужно применить закон изменения механической энергии (10).

4. Записав систему уравнений для задачи, нужно проследить, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных. Решение задачи нужно получать в общем виде и только после этого в полученные формулы подставить цифровые данные.

Задача III.1 По канатной железной дороге с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ опускается вагонетка массой M=1000 кг. Определить натяжение каната при торможении вагонетки в конце спуска, если скорость в конце торможения v_0=5 м/с, а время торможения t_0=10 с. Коэффициент трения принять равным u=0,4, ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Решение. На тележку действуют четыре силы: сила тяжести $M\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$, сила натяжения каната $\vec{T}$ и сила трения $\vec{f}_{\text{тр}}$ (*рис. III.3*). Для тележки эти силы внешние. Эту задачу можно решить, не прибегая к привычной записи второго закона Ньютона, а используя закон изменения импульса: изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время Δt равно импульсу всех сил, действующих на тело за это время, т.е.

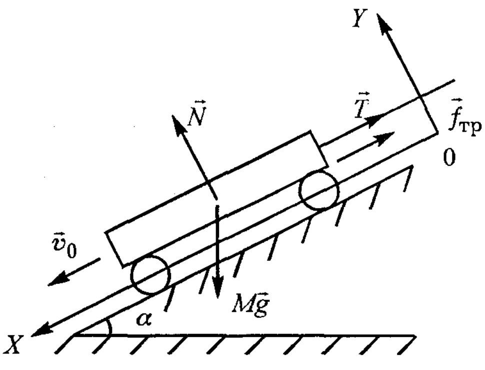


Рис. III.3

$$\Delta t \sum \vec{F}_i = \Delta \vec{p} = M \Delta \vec{v}.$$

Направим ось $0X$ вдоль наклонной плоскости, как показано на рис. III.3, а ось $0Y$ – перпендикулярно к ней.

В проекции на направление $0X$ этот закон запишется в виде

$$\left(Mg \sin\alpha - T - f_{\text{тр}}\right)\Delta t = M\left(0 - v_0\right), \text{ или}$$

$$T + f_{\text{тр}} - Mg\sin\alpha = \frac{Mv_0}{t_0}.$$

Следовательно, сила натяжения каната равна

$$T = \frac{Mv_0}{t_0} - f_{\text{тр}} + Mg\sin\alpha, \quad \text{где} \quad f_{\text{тр}} = \mu N.$$

Реакция опоры $\vec{N}$ определяется из обычной записи второго закона Ньютона вдоль оси $0Y$: $N - Mg\cos\alpha = 0$, или $N = Mg\cos\alpha$. Таким образом, натяжение каната T равно

$$T = \frac{Mv_0}{t_0} - \mu Mg\cos\alpha + Mg\sin\alpha = \frac{Mv_0}{t_0} +$$

$$+ Mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

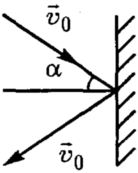
Подставив численные значения величин, получим

$$T = \frac{1000\,\text{кг} \cdot 5\,\text{м/с}}{10\,\text{с}} + 1000\,\text{кг} \cdot 10\,\text{м/с}^2 \cdot (0{,}5 - 0{,}34) =$$

$$= 2100\text{Н}.$$

Запись второго закона Ньютона через импульс всех сил, действующих на тело, удобно использовать тогда, когда вас не интересует, как меняется скорость тела за интервал времени Δt, а известны начальные и конечные значения скоростей.

Задача III.2 Шарик массой m, движущийся по идеально гладкой поверхности, упруго ударяется о преграду под углом α к горизонту (*рис. III.4, а*). Величина скорости шарика до и после удара равна v_0, а угол падения равен углу отражения. Определить изменение импульса шарика $\Delta\vec{p}$.



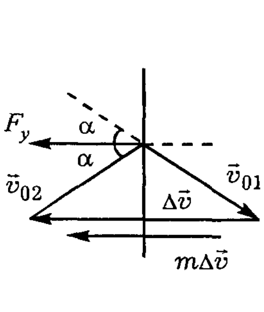
(а)

Рис. III.4

Решение. Вектор скорости шарика v_0, хотя и остается неизменным по величине, меняет свое направление, а это означает, что изменение импульса шарика $\Delta\vec{p}$ не равно нулю, т. е. закон сохранения импульса для шарика не выполняется:

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m\left(\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}\right) \neq 0,$$

где $\vec{v}_{20}$ и $\vec{v}_{10}$ – конечная и начальная скорости шарика.



(б)

Рис. III.4

Таким образом, на шарик обязательно должна действовать некоторая сила, направленная в ту же сторону, что и вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$, так как

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}.$$

Такой силой является сила упругости. Именно она, действуя на шарик, меняет направление его скорости.

Изменение вектора импульса шарика $\Delta\vec{p}$ направлено в ту же сторону, что и изменение вектора его скорости $\Delta\vec{v}$ (*рис.III.4*, б), а по величине равно $|\Delta\vec{p}| = m\Delta v = 2mv_0 \cos\alpha$.

Задача III.3 Между двумя лодками, находящимися на поверхности озера, протянута веревка, которую человек, находящийся в одной из лодок, тянет с горизонтальной силой F=50H. Определить скорость лодки с человеком относительно берега и относительно второй лодки через время t_0=5 с. Масса лодки с человеком M_1=250 кг, а лодки без человека M_2=200 кг. Обе лодки движутся без трения.

Решение. На каждую из лодок вдоль горизонтального направления действует внешняя сила натяжения нити T=F (*рис. III.5*). За время t_0 изменение импульса $\Delta\vec{p}$ каждой из лодок равно $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, или

$$M_1(v_{к1} - v_{01}) = \Delta p = Ft_0;$$
$$M_2(v_{к2} - v_{02}) = \Delta p = Ft_0,$$

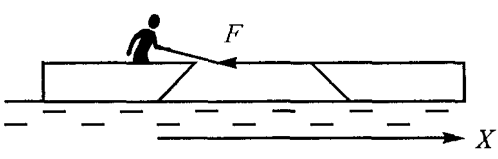


Рис. III.5

где v_{01}, v_{02} — начальные скорости лодок; $v_{к1}, v_{к2}$ — конечные скорости лодок к моменту времени t_0 относительно Земли. Так как лодки вначале покоились, то $v_{01} = v_{02} = 0$. Поэтому

$$v_{к1} = \frac{Ft_0}{M_1} = \frac{50 \cdot 5}{250} = 1 \text{ м/с, а}$$

$$v_{к2} = \frac{Ft_0}{M_2} = \frac{50 \cdot 5}{200} = 1{,}25 \text{ м/с.}$$

Скорость первой лодки относительно второй определяется из закона сложения скоростей $\vec{v}_{1-2} = \vec{v}_{к1} - \vec{v}_{к2}$. Записав это уравнение в проекции на ось $0X$, получим

$$v_{1-2} = v_{к1} - \left(-v_{к2}\right) = v_{к1} + v_{к2} =$$

$$= \frac{Ft_0}{M_1} + \frac{Ft_0}{M_2} = \frac{Ft_0\left(M_1 + M_2\right)}{M_1 M_2} = \frac{50 \cdot 5 \cdot 450}{250 \cdot 200} = 2{,}25 \text{ м/с.}$$

Однако, если рассмотреть систему тел, состоящую из двух лодок, то сила натяжения веревки является внутренней силой. Поэтому вдоль горизонтального направления для этой системы тел можно применить закон сохранения импульса. Вначале лодки покоились, т. е. $v_{01} = v_{02} = 0$. Начальный импульс системы был равен

$$\vec{P}_1 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M_1\vec{v}_{01} + M_2\vec{v}_{02} = 0.$$

Этот импульс должен сохраняться и во все время движения. Через время t_0 импульс системы тел равен

$$\vec{P}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = M_1\vec{v}_{к1} + M_2\vec{v}_{к2} = 0,$$

или $M_1\vec{v}_{к1} = -M_2\vec{v}_{к2}$. Знак «–» означает, что лодки движутся в разных направлениях. Отношение их скоростей обратно пропорционально отношению их масс:

$$\frac{|\vec{v}_{к1}|}{|\vec{v}_{к2}|} = \frac{M_2}{M_1}.$$

Задача III.4 Человек в лодке длиной l, обращенной кормой к берегу, переходит с кормы на нос (*рис. III.6*). Определить скорость человека относительно берега. Как меняется расстояние между человеком и берегом? Масса человека m, лодки – M. Человек вдоль лодки передвигается со скоростью $\vec{v}_0$.

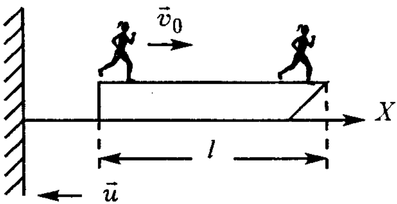


Рис. III.6

Решение. Рассмотрим систему из двух тел: человек – лодка. Для этой системы тел сумма всех внешних сил равна нулю. Поэтому выполняется закон сохранения импульса. Запишем его в системе отсчета, связанной с Землей

$$m(\vec{v}_0 + \vec{u}) + M\vec{u} = 0,$$

где $\vec{u}$ – скорость лодки относительно Земли. В проекции вдоль оси 0X это соотношение запишется

$$m(v_0 - u) - Mu = 0.$$

Это выражение позволяет вычислить скорость лодки u относительно Земли:

$$u = \frac{mv_0}{M+m}.$$

Скорость человека относительно берега $v_{ч.б}$ равна

$$v_{ч.б} = v_0 - u = v_0 - \frac{mv_0}{M+m} = \frac{Mv_0}{M+m}.$$

Скорость человека относительно берега совпадает по знаку со скоростью v_0, поэтому при любом соотношении масс m и M расстояние между человеком и берегом увеличится.

Определим на какую величину ΔS увеличится это расстояние. Так как лодка и человек движутся одновременно, то $\frac{l}{v_0} = \frac{\Delta S}{v_{ч.б}}$. Следовательно,

$$\Delta S = \frac{lv_{ч.б}}{v_0} = l\frac{Mv_0}{(M+m)v_0} = l\frac{M}{M+m}.$$

Задача III.5 Две лодки массой M каждая идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0 и с одинаковыми грузами m. Когда лодки поравнялись, с первой лодки на вторую перебрасывают груз m, а затем со второй лодки на первую перебрасывают такой же груз. Определить скорости лодок v_1 и v_2 после перебрасывания грузов.

Решение. В этой задаче удобно рассмотреть систему тел: одна лодка и груз m другой лодки. Так как в горизонтальном направлении на систему внешние силы не действуют, то можно применить закон сохранения импульса. Для первой лодки

$$(M+m)v_0 - mv_0 = (M+2m)v_1,$$

для второй лодки

$$-Mv_0 + mv_1 = (M+m)v_2,$$

где v_1 и v_2 – конечные скорости лодок.
Решив эту систему уравнений, получаем

$$v_1 = -v_2 = \frac{Mv_0}{M+2m}.$$

Таким образом, обе лодки движутся с одинаковыми по величине скоростями, но в разных направлениях.

Задача III.6 Навстречу платформе с песком массой M, движущейся горизонтально со скоростью $\vec{u}_0$, летит снаряд массой m со скоростью $\vec{v}$ под углом α к горизонту. Снаряд попадает в песок и застревает в нем. Определить скорость платформы $\vec{u}$ после попадания снаряда (*рис. III.7*).

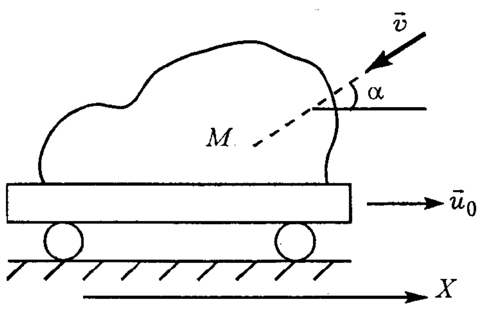


Рис. III.7

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел: снаряд – платформа. Вдоль горизонтального направления (оси $0X$) для этой системы тел выполняется закон сохранения импульса, так как проекции всех внешних сил вдоль этого направления равны нулю, т. е. $P_{1x} = P_{2x}$. Импульс системы тел до взаимодействия P_{1x} равен

$$P_{1x} = Mu_0 - mv\cos\alpha .$$

После взаимодействия

$$P_{2x} = (M + m)u .$$

Таким образом, $Mu_0 - mv\cos\alpha = (M + m)u$.

Это соотношение позволяет определить скорость платформы u после попадания снаряда

$$u = \frac{Mu_0 - mv\cos\alpha}{M + m} .$$

Задача III.7 Призма массой m помещается на идеально гладкую призму массой M=3m (*рис. III.8*). Какое расстояние пройдет нижняя призма к моменту, когда верхняя коснется горизонтальной идеально гладкой плоскости? Основание большой призмы a, малой — b.

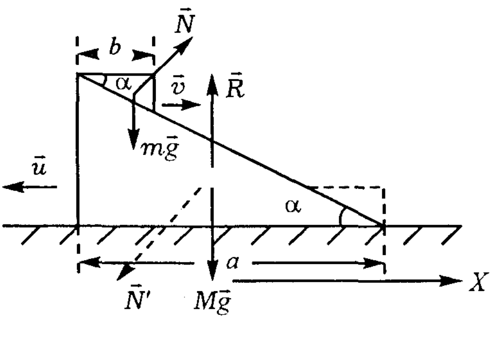


Рис. III.8

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел: верхняя и нижняя призмы. Проекции внешних сил $m\vec{g}$, $M\vec{g}$ и $\vec{R}$ вдоль направления $0X$ равны нулю. Силы же $\vec{N}$ и $\vec{N}'$ являются внутренними, причем $\vec{N}=-\vec{N}'$. Поэтому можно применить закон сохранения импульса. Поскольку в начальный момент времени призмы покоились, то

$$0 = mv_x + Mu_x = mv_x - Mu,$$

где v_x – горизонтальная составляющая скорости малой призмы вдоль оси $0X$ относительно Земли; u_x – скорость нижней призмы вдоль горизонтальной поверхности, причем $u_x = -u$.

Отношение скоростей призм равно отношению масс

$$\frac{v_x}{u} = \frac{M}{m} = \frac{3m}{m} = 3.$$

Таким образом, $v_x = 3u$. Это соотношение справедливо для любого момента времени.

Так как тела движутся с постоянными ускорениями и в начальный момент призмы покоились, то аналогичное соотношение справедливо и для горизонтальных перемещений призм, т. е.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{v_x}{u} = 3,$$

причем $\Delta x_1 = S_1 = (a-b) - S_2$; $\Delta x_2 = S_2$, где S_1 и S_2 расстояния, которые пройдут соответственно верхняя и нижняя призмы по горизонтали относительно Земли к моменту касания верхней призмы горизонтальной плоскости. Следовательно:

$$\frac{(a-b) - S_2}{S_2} = 3.$$

Отсюда расстояние S_2, на которое переместится нижняя призма относительно Земли, равно

$$S_2 = \frac{a-b}{4}.$$

Задача III.8 На гладкой горизонтальной плоскости стоит брусок массой M, к которому на длинной нити l привязан шарик массой m. Вначале нить отклонили на некоторый угол и отпустили без начальной скорости. Определить скорость бруска в тот момент, когда нить проходит через вертикальное положение, если угловая скорость шарика в этот момент равна ω (*рис. III.9*).

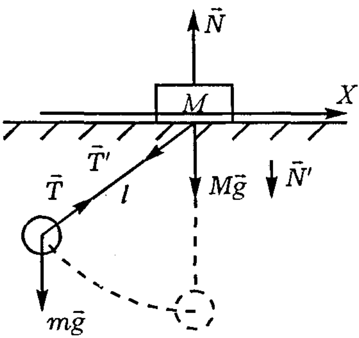


Рис. III.9

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел: брусок — шарик. Для этой системы тел силы натяжения нитей $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ являются внутренними силами, проекции сил тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$ вдоль горизонтального направления равны нулю. В начальный момент вся система покоится, следовательно, суммарный импульс тел равен нулю. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление $0X$ для момента, когда нить проходит через вертикальное направление:

$$-Mu + mv = 0,$$

где u — скорость бруска, v — скорость шарика в момент прохождения вертикального положения. Обе скорости взяты относительно Земли. Причем $v = \omega l - u$. Следовательно:

$$-Mu + m(\omega l - u) = 0.$$

Отсюда скорость бруска в момент прохождения нитью вертикального положения равна

$$u = \frac{m\omega l}{M + m}.$$

Задача III.9 Поезд массой M, двигавшийся со скоростью v, начинает тормозить и останавливается, пройдя путь S. Какова сила торможения F?

Решение. Сила торможения $\vec{F}$ для поезда является внешней силой, поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется. Изменение кинетической энергии равно работе сил торможения (п.III.9), т. е.

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{внеш}};$$

$$0 - \frac{mv^2}{2} = FS\cos 180^\circ, \text{ или } F = \frac{mv^2}{2S}.$$

Задача III.10 Тело массой m, брошенное со скоростью v_0 с высоты H вертикально вниз, погрузилось в мягкий грунт на глубину h. Определить силу сопротивления грунта.

Решение. Тело массой m на высоте H обладает потенциальной и кинетической энергией, которая расходуется на преодоление силы сопротивления грунта и на приобретение потенциальной энергии на глубине h.

Примем за нулевой уровень отсчета поверхность Земли. Тогда изменение механической энергии равно работе сил сопротивления, т. е.

$$\Delta E = \Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{с}, \text{ или}$$

$$\left(0 - \frac{mv_0^2}{2}\right) + \left(-mgh - mgH\right) = F_{с}h\cos 180^{\circ} = -Fh.$$

Следовательно, сила сопротивления грунта равна

$$F = \frac{2g(H+h)m + mv_0^2}{2h}.$$

Задача III.11 Два абсолютно упругих шара массами m_1 и m_2 движутся друг за другом по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями v_1 и v_2 и соударяются. Найти скорости шаров $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ после соударения.

Решение. При соударении на шары в горизонтальном направлении действуют силы взаимодействия (силы упругости), однако они являются внутренними и консервативными, поэтому в этой задаче можно использовать закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса, которые запишутся в проекции на ось $0X$ следующим образом (ось $0X$ выберем вдоль движения шаров):

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2};$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Для удобства решения эту систему уравнений целесообразно переписать в виде

$$m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right); \qquad (1)$$

$$m_1\left(v_1 - u_1\right) = m_2\left(u_2 - v_2\right). \qquad (2)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \qquad (3)$$

Далее используем уравнения (2) и (3)

Решая эту систему, получим выражение для конечных скоростей

$$u_1 = \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \qquad (4)$$

$$u_2 = \frac{\left(m_2 - m_1\right)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Мы получили общие выражения для скоростей u_1 и u_2, которые можно использовать для любого направления движения первоначальных скоростей v_1 и v_2 вдоль оси $0X$. В этом случае, если какая-либо из скоростей (v_1 или v_2) совпадает по направлению с осью $0X$, то она берется со знаком «+» в формулах (4) и (5), если же не совпадает – то со знаком «–».

Предположим, что шар массой m_1 движется со скоростью v_1, а шар массой m_2 покоится (т. е. $v_2=0$), тогда формулы (4) и (5) примут вид

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \qquad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно, если $m_1 > m_2$, то оба шара после взаимодействия будут двигаться в сторону, куда была направлена скорость $\vec{v}_1$. Если же $m_1 < m_2$, то первый шар после взаимодействия отскочит в обратную сторону ($u_1 < 0$), а второй будет двигаться в направлении скорости $\vec{v}_1$.

Если же массы шаров одинаковы, то после взаимодействия первый шар остановится ($u_1 = 0$), а второй будет двигаться со скоростью v_1.

Задача III.12 Идеально гладкий шар A, движущийся со скоростью $\vec{v}_1$, соударяется одновременно с двумя такими же соприкасающимися между собой шарами B и C (*рис. III.10*). Считая соударение шаров абсолютно упругими, определить их скорости после взаимодействия.

Решение. В момент соударения на шары B и C действуют силы упругости, направленные вдоль прямых, соединяющих их центры с центром ударяющегося шара A. Поэтому после соударения движение шаров B и C происходит вдоль этих пря-

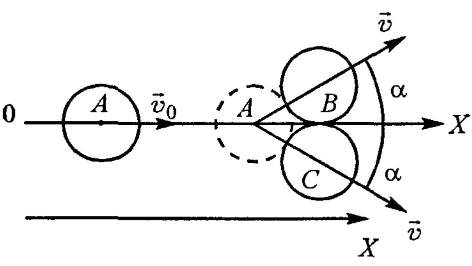


Рис. III.10

мых. В силу симметрии скорости шаров B и C ($\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$) после соударения одинаковы и направлены под углом α к оси $0X$.

Для системы тел, состоящей из трех шаров, выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии, так как силы упругости являются внутренними силами. Запишем эти законы:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{u}; \qquad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mu^2}{2}, \qquad (2)$$

где u – скорость шара A после соударения.

Учитывая, что скорости шаров B и C после удара одинаковы по величине, т. е. $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, уравнение (1) системы вдоль оси $0X$ запишется: $mv_0 = mv\cos\alpha + mv\cos\alpha + mu = 2mv\cos\alpha + mu$, а систему уравнений (1) и (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_0 &= 2v\cos\alpha + u, \\ v_0^2 &= 2v^2 + u^2, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} v_0 - u &= 2v\cos\alpha; \\ v_0^2 - u^2 &= 2v^2. \end{aligned}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$v_0 + u = v / \cos\alpha.$$

Теперь можно рассматривать систему двух уравнений, но уже первой степени:

$$v_0 + u = v / \cos\alpha; \qquad (3)$$

$$v_0 - u = 2v\cos\alpha. \qquad (4)$$

Сложив уравнения (3) и (4), получим

$$2v_0 = v / \cos\alpha + 2v\cos\alpha .$$

Откуда

$$v = \frac{2v_0}{1/\cos\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{2v_0\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha} = \frac{2v_0\sqrt{3}/2}{1+2\cdot 3/4} = \frac{2v_0\sqrt{3}}{5}.$$

Скорость шарика A после удара определим из уравнения (4):

$$u = v_0 - 2v\cos\alpha = v_0 - \frac{2v_0 3}{5} = -\frac{v_0}{5}.$$

Таким образом, после соударения шары B и C будут двигаться вправо (*рис. III.10*), а шар A после соударения будет двигаться влево, на что указывает знак «–».

Задача III.13 Два абсолютно упругих шарика массами m и M подвешены на одинаковых нитях длиной l каждая (*рис. III.11*). Шарик массой m отклоняют от положения равновесия на 90° и отпускают. На какую высоту H поднимется шарик массой M после соударения?

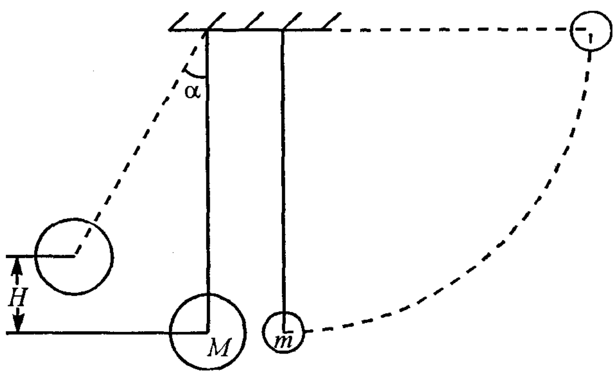


Рис. III.11

Решение. Рассмотрим систему двух тел: какой-либо шарик – Земля. В этой системе тел силы тяжести и натяжения нитей являются внутренними и консервативными силами, поэтому для данной системы тел выполняется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Однако изменение импульса Земли, так же как и изменение ее механической энергии, столь мало, что с огромной степенью точности ими можно пренебречь по сравнению с изменением импульсов шариков и изменением их механических энергий.

Если за нулевой уровень потенциальной энергии выбрать положение равновесия шариков, то

$$\Delta E_{к} + \Delta E_{п} = \Delta E_{мех} = 0.$$

Для первого шарика до удара

$$\left(\frac{mv_1^2}{2} - 0\right) + (0 - mgl) = 0.$$

После удара

$$\left(\frac{0 - mv_2^2}{2}\right) + (mgh - 0) = 0, \quad \text{или}$$

$$mgl = \frac{mv_1^2}{2}; \qquad (1)$$

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2}, \qquad (2)$$

где v_1 и v_2 – скорости шарика массой m до и после удара соответственно, h – высота подъема этого шарика после удара.

Для большого шарика после соударения запишем

$$MgH - \frac{Mu^2}{2} = 0; \; MgH = \frac{Mu^2}{2}, \qquad (3)$$

где u — скорость шарика массы M после соударения, а H – высота, на которую он поднимется. При соударении шариков закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса запишутся

$$\begin{aligned} &\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}; \\ &mv_1 = mv_2 + Mu. \end{aligned} \qquad (4)$$

Уравнение (1) позволяет получить скорость шарика массой m до столкновения. Система уравнений (3) и (4) позволяет вычислить скорости обоих шариков после столкновения:

$$u = \frac{2m}{M+m}\sqrt{2gl}; \;\; v_2 = -\frac{(M-m)\sqrt{2gl}}{M+m}.$$

Знак «—» говорит о том, что в случае $M > m$ маленький шарик после удара отскочит влево. Высота подъема шарика массой M определяется из уравнения (3)

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{4m^2 l}{(M+m)^2}.$$

Именно это и требуется определить в задаче. Если бы нас интересовала высота подъема маленького шарика после удара, то мы могли бы воспользоваться уравнением (2).

Задача III.14 Пуля массой m летит со скоростью v_0 и пробивает тяжелую доску толщиной d, движущуюся навстречу пуле со скоростью u. С какой скоростью v вылетит пуля из доски? Скорость доски не меняется, а силу сопротивления F_C движению пули в доске считать постоянной.

Решение. Сила сопротивления F_C для пули является внешней силой (*рис. III.12*), и она совершает работу, когда пуля движется внутри доски, т. е. на расстоянии d. Однако пуля проходит расстояние d относительно доски, поэтому изменение механической энергии пули удобнее рассматривать относительно доски, и нужно применить формулу (10) (пIII.9), т. е.

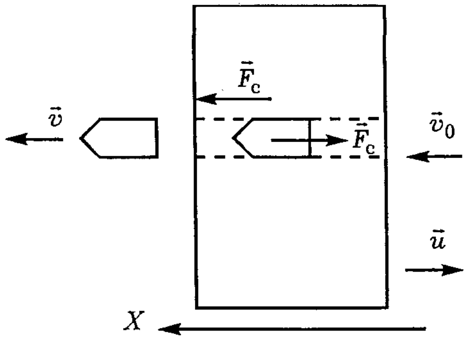


Рис. III.12

$$\Delta E_к = \frac{m}{2}\left[v-(-u)\right]^2 - \frac{m\left[v_0-(-u)\right]^2}{2} = Fd\cos\alpha = -Fd,$$

$$\text{или} \quad \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{m(v_0+u)^2}{2} = -Fd.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$v+u = \sqrt{(v_0+u)^2 - \frac{2Fd}{m}}, \text{ т. е.}$$

$$v = \sqrt{\left(v_0 + u\right)^2 - \frac{2Fd}{m}} - u\,.$$

Задача III.15 От поезда массой M, движущегося с постоянной скоростью, отрывается последний вагон массой m, который прходит путь S и останавливается. На каком расстоянии L находится поезд от вагона в момент остановки последнего? (*рис. III.13, а*).

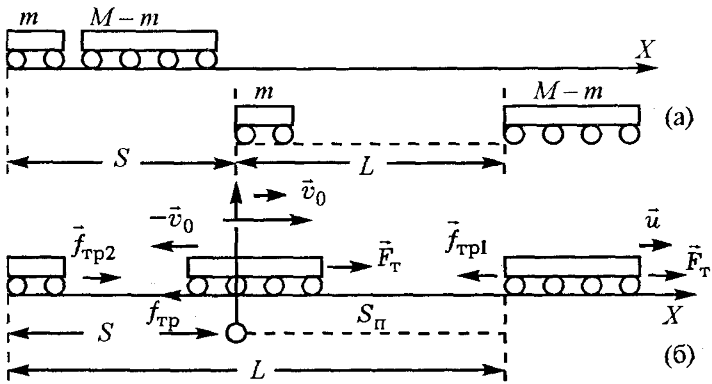


Рис. III.13

Решение. Сумма сил, действующих на весь состав до и после отрыва вагона, равна нулю, поэтому для системы: поезд — оторвавшийся вагон, выполняется закон сохранения импульса. Направим ось $0X$ вправо. Вдоль этой оси выполняется соотношение

$$F_т - f_{тр} = 0\,, \quad \text{или} \quad f_{тр} = \mu M g\,.$$

Для простоты решения удобно выбрать систему координат, которая движется со скоростью $\vec{v}_0$ всего состава до отрыва вагона. В этой системе координат закон сохранения импульса имеет вид

$$0 = mv + (M - m)u\text{, или } v = -\frac{(M - m)u}{m},$$

где v и u — соответственно скорости вагона и поезда в системе координат, движущейся со скоростью v_0. По сравнению с поездом в выбранной системе координат вагон движется в обратную сторону (*рис. III.13*, б). Расстояния, пройденные вагоном ($S_в$) и поездом ($S_п$) в этой системе координат относятся как их скорости, т. е.

$$\frac{S_в}{S_п} = \frac{v}{u} = \frac{(M - m)}{m}.$$

В условии задачи известно, что вагон остановится, пройдя расстояние S относительно Земли. В системе координат, движущейся со скоростью v_0, вагон за время движения также пройдет расстояние S, только скорость его в движущейся системе координат станет равной $-v_0$ к моменту остановки относительно Земли. Действительно, $\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}$. Так как $v_{пер} = v_0$, то при остановке вагона относительно Земли ($v_{абс} = 0$) скорость относительно подвижной системы координат равна

$$v_{отн} = v_{абс} - v_{пер} = 0 - v_0 = -v_0.$$

Следовательно,

$$\frac{S}{S_п} = \frac{M-m}{m}, \text{ или } \quad S_п = \frac{Sm}{M-m}.$$

Расстояние L между вагоном и поездом, которое нужно определить в условии задачи, равно (см. рис. III.13, б)

$$L = S + S_п = S + \frac{Sm}{M-m} = \frac{SM}{M-m}.$$

Задача III.16 Тележка массой M движется без трения по горизонтальным рельсам со скоростью v_0. На передний край тележки кладут тело массой m без начальной скорости. Тело, пройдя некоторое расстояние вдоль тележки, останавливается. Определить это расстояние l, если коэффициент трения между телом и тележкой μ.

Решение. Все силы, действующие на тело и тележку, изображены на *рис. III.14*. Вдоль горизонтального направления можно применить закон сохранения импульса для системы: тело — тележка. В этом случае сумма проекций внешних

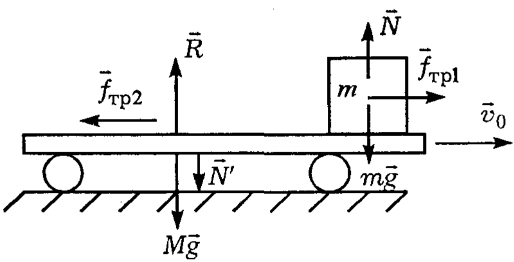


Рис. III.14

сил равна нулю, а силы трения являются внутренними силами $\left(\vec{f}_{\text{тр}1} = -\vec{f}_{\text{тр}2}\right)$. Поэтому можно записать

$$Mv_0 = (m + M)u,$$

где u — скорость тележки и тела относительно Земли после остановки последнего.
Тогда

$$u = \frac{Mv_0}{(m + M)}. \qquad (1)$$

А вот закон сохранения механической энергии для этой системы тел применить нельзя, поскольку сила трения является неконсервативной силой, поэтому изменение механической энергии равно работе сил трения, т. е.

$$\Delta E_{\text{к}} = \left(E_{\text{кк}} - E_{\text{кн}}\right) = A_{\text{тр}1} + A_{\text{тр}2}, \text{ или}$$

$$\frac{(m + M)u^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -f_{\text{тр}2}S - f_{\text{тр}1}s, \qquad (2)$$

где S и s — расстояния, пройденные тележкой и телом относительно Земли соответственно. Решая совместно уравнения (1) и (2) и используя выражение для силы трения, получим

$$\frac{(m + M)(Mv_0)^2}{(m + M)^2} - Mv_0^2 = 2\mu mg(s - S) = -2\mu mgl,$$

или $Mv_0^2\left(\frac{M}{m + M} - 1\right) = -2\mu mgl$.

Таким образом, тело вдоль тележки прошло расстояние

$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}.$$

Следует обратить внимание на то, что работа сил трения определяется относительным перемещением тела l.

IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Вращательное движение

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки имеют одинаковые угловые перемещения ($\Delta\varphi$), угловые скорости $\left(\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)$ и угловые ускорения $\left(\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$.

Задачи на динамику вращательного движения по окружности, в принципе, ничем не отличаются от задач на динамику прямолинейного движения точки и также подчиняются второму закону Ньютона $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – полное ускорение точки, состоящее из нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального (касательного) $\vec{a}_\tau$ ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

При этом $a_n = \frac{v^2}{R}$ меняет только направление скорости, a_τ – только величину скорости.