$$l = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(m+M)}.$$

Следует обратить внимание на то, что работа сил трения определяется относительным перемещением тела l.

IV. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Вращательное движение

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки имеют одинаковые угловые перемещения ($\Delta\varphi$), угловые скорости $\left(\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)$ и угловые ускорения $\left(\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$.

Задачи на динамику вращательного движения по окружности, в принципе, ничем не отличаются от задач на динамику прямолинейного движения точки и также подчиняются второму закону Ньютона $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — полное ускорение точки, состоящее из нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального (касательного) $\vec{a}_\tau$ ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

При этом $a_n = \frac{v^2}{R}$ меняет только направление скорости, a_τ — только величину скорости.

Большую часть задач на динамику вращательного движения удобно решать с привлечением закона сохранения механической энергии.

Вновь предлагаем некоторую последовательность действий (некий алгоритм) при решении задач на динамику вращательного движения.

1. Аккуратно рисуем рисунок, отражающий условие задачи. На этом рисунке стрелочками изображаем все силы, действующие на тело.

2. Записываем второй закон Ньютона в векторном виде, а затем переписываем его в проекции на ось $0X$, которую направляем обычно вдоль радиуса к центру. Именно так удобно выбрать направление оси $0X$, поскольку мы знаем ускорение вдоль этой оси $a_n = \frac{v^2}{R}$, т. е.

$$\sum F_{ix} = ma_n = \frac{mv^2}{R}. \qquad (1)$$

Вторую ось $0Y$ обычно направляют вдоль касательной и второй закон Ньютона вдоль этой оси запишется

$$\sum F_{iy} = ma_\tau. \qquad (2)$$

Однако часто для решения задач на динамику удобнее использовать вместо уравнения (2) закон сохранения механической энергии (если это позволяет сделать условие задачи):

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}, \text{ или } \Delta\left(E_к + E_п\right) = 0. \qquad (3)$$

Закон сохранения механической энергии используется в том случае, если для решения задачи уравнения Ньютона в виде (1) нам недостаточно. Ответ получаем только в общем (буквенном) виде, так как в этом случае его удобно анализировать. И только после этого подставляем цифры в полученную формулу.

Задача IV.1 Два одинаковых шарика A и B укреплены на концах невесомой нити, продетой через трубку, как показано на *рис. IV.1*. Шарик A, находящийся на поверхности диска, вращается в горизонтальной плоскости. Расстояние от оси трубки до шарика A равно r. С какой угловой скоростью должен вращаться шарик A, чтобы шарик B находился в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым? Трением пренебречь.

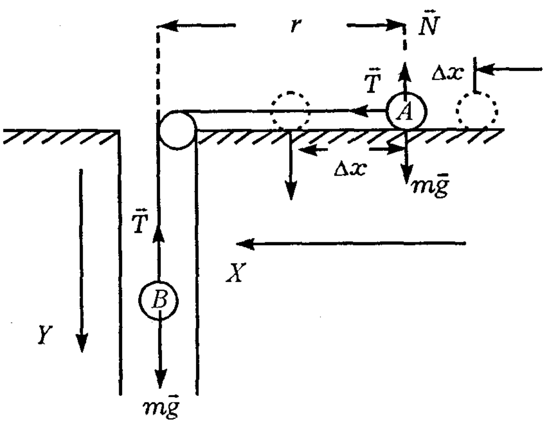

Рис. IV.1

Решение. На шарик A действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и натяжение нити

$\vec{T}$. На шарик B действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в векторной форме выглядит так:

для шарика A $\qquad \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{н}$, $\qquad$ (1)

для шарика B $\qquad m\vec{g} + \vec{T} = 0$. $\qquad$ (2)

Выберем ось $0X$, направленную вдоль нити, а ось $0Y$ опустим вниз. Тогда для шарика A вдоль направления $0X$ уравнение (1) запишется

$$T = m\omega^2 r,$$

а уравнение (2) вдоль направления $0Y$

$$mg - T = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$T = m\omega^2 r = mg. \qquad (3)$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \qquad (4)$$

Очень важно теперь выяснить, будет ли это равновесие шариков устойчивым? Для того чтобы определить устойчивость равновесия, нужно сместить шарик A на Δx влево (либо вправо) и посмотреть, как изменились силы, действующие на шарик. При смещении шарика A влево сила натяжения T уменьшается, так как теперь

$$T_1 = m\omega^2(r - \Delta r).$$

Но тогда сила натяжения, действующая на шарик B, тоже уменьшается, поскольку до смещения эта сила равнялась $m\vec{g}$ по формуле (3). Поэтому шарик B поедет вниз и потянет за собой шарик A. Это, в свою очередь, еще больше уменьшит силу натяжения и т. д. Аналогичные рассуждения можно провести и при смещении шарика A на Δx вправо. Поэтому положение равновесия шариков будет неустойчивым.

Задача IV.2 Шарик массой m прикреплен к невесомой пружине и движется по окружности в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Определить силу натяжения пружины с жесткостью k (начальная длина нерастянутой пружины l_0 и радиус окружности, по которой движется шарик, l (*рис. IV.2*).

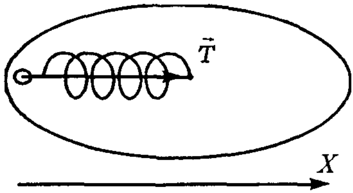

Рис. IV.2

Решение. В горизонтальном направлении на шарик действует только сила натяжения пружины $\vec{T}$, которая является силой упругости и по закону Гука равна $T = k\Delta l = k(l - l_0)$. Именно эта сила сообщает шарику нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \omega^2 l.$$

Направим ось $0X$, как показано на рисунке. Второй закон Ньютона вдоль этого направления запишется

$$T = m\omega^2 l, \text{ или } k(l - l_0) = m\omega^2 l.$$

Это соотношение позволяет вычислить радиус окружности l, по которой движется шарик,

$$l\left(k - m\omega^2\right) = kl_0, \text{ или } l = \frac{kl_0}{\left(k - m\omega^2\right)}.$$

Задача IV.3 Автомобиль, масса которого M, движется с постоянной скоростью v один раз по выпуклому мосту, а другой раз по вогнутому. В обоих случаях радиус кривизны мостов одинаков и равен R. Определить вес машины P в середине моста в обоих случаях. (*рис. IV.3*) Трение не учитывать.

Решение. На автомобиль действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. В середине моста эти силы направлены вдоль одной прямой. Выберем ось $0Y$, направленную, например, вниз. Тогда вдоль этого направления для случая а) и б) (см. рис. IV.3) второй закон Ньютона запишется соответственно

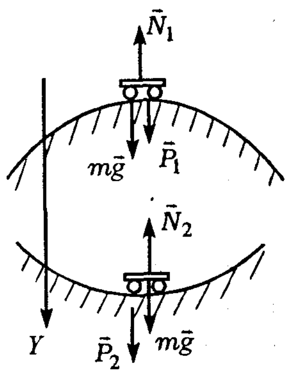

Рис. IV.3

а) $mg - N_1 = ma_n = \dfrac{mv^2}{R}$, откуда

$$N_1 = mg + \frac{mv^2}{R} = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right);$$

б) $mg - N_2 = -ma_n = -\dfrac{mv^2}{R}$. Следовательно,

$$N_2 = mg + \frac{mv^2}{R} = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right).$$

Как видно, в обоих случаях реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ разные. Поскольку вес тела — это сила, с которой тело действует на опору, то по величине вес тела в нашей задаче в обоих случаях будет разным: $P_1 = N_1$, а $P_2 = N_2$. Таким образом, при движении автомобиля по выпуклому мосту его вес меньше силы тяжести $m\vec{g}$, а по вогнутому — больше силы тяжести.

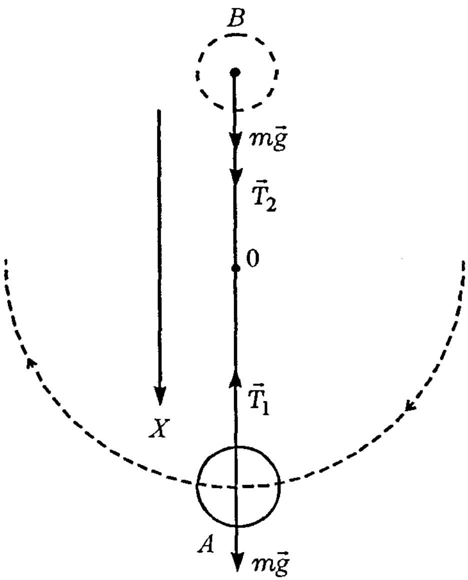

Рис. IV.4

Задача IV.4 Грузик, имеющий массу m, прикреплен к концу невесомого стержня длиной l, который равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг другого конца, делая n оборотов в секунду (*рис. IV.4*). Каково натяжение стержня, когда грузик проходит верхнюю и нижнюю точки своей траектории?

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения стержня $\vec{T}$. В разных точках траектории сила натяжения разная. Направим ось $0X$ вниз и запишем второй закон Ньютона для нижней A и верхней B точек траектории соответственно:

$$mg - T_1 = -ma_n = -m\omega^2 l;$$

$$mg + T_2 = ma_n = m\omega^2 l.$$

Учитывая, что угловая скорость связана с числом оборотов соотношением $\omega = 2\pi n$, получим выражение для натяжения стержня

$$T_1 = mg + m\omega^2 l = m\left(g + \omega^2 l\right) = m\left(g + 4\pi^2 n^2 l\right);$$

$$T_2 = m\omega^2 l - mg = m\left(4\pi^2 n^2 l - g\right).$$

Задача IV.5 Шарик массой m подвешен на нити, длина которой l. Шарик равномерно вращается в горизонтальной плоскости, при этом нить отклоняется на угол α от вертикали (*рис. IV.5*) — конический маятник. Определить период вращения шарика T.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение нити $\vec{N}$. Результирующая этих сил сообщает шарику нормальное ускорение $\vec{a}_n$. Второй закон Ньютона для шарика имеет вид

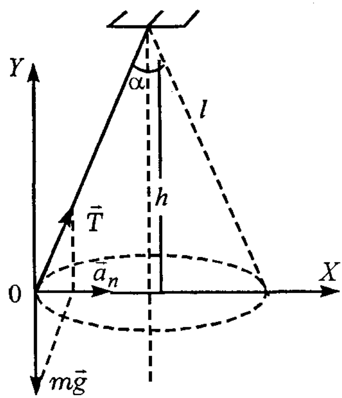

Рис. IV.5

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n .$$

В проекциях на оси $0X$ и $0Y$ соответственно этот закон запишется

$$N \sin\alpha = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\alpha ;$$

$$N \cos\alpha - mg = 0.$$

Решая систему двух уравнений, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 l \sin\alpha}{g} .$$

Отсюда $\omega^2 = \dfrac{g}{l\cos\alpha}$, а период вращения шарика

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} ,$$

где h – расстояние от точки подвеса до плоскости круга, по которому движется шарик (сравним с формулой периода для математического маятника длиной h).

Задача IV.6 По вертикально расположенному обручу радиуса R может без трения скользить колечко. Обруч вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Колечко находится в равновесии на высоте h от нижней точки обруча. Определить угловую скорость вращения обруча ω (*рис. IV.6*).

Решение. На колечко в любой момент времени действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Эти две силы сообщают кольцу нормальное ускорение $\vec{a}_n$, с которым оно движется по окружности радиуса r. Второй закон Ньютона в векторной записи имеет вид

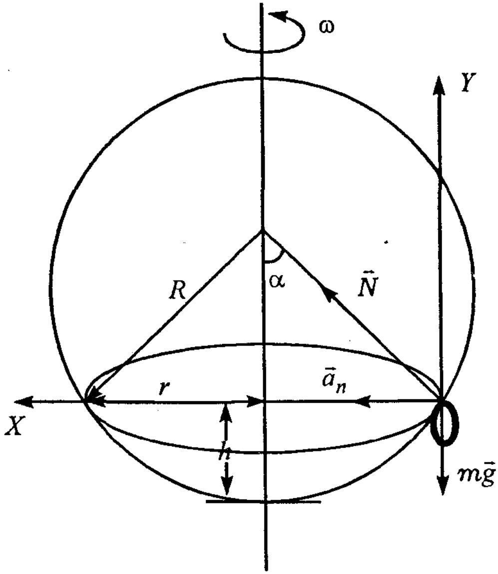

Рис. IV.6

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n.$$

Выбрав оси $0X$ и $0Y$, как указано на рисунке, запишем этот закон в проекциях на эти оси соответственно

$$N \sin\alpha = ma_n = m\omega^2 r;$$

$$N\cos\alpha - mg = 0, \text{ или } N\cos\alpha = mg.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}, \text{ или } \omega^2 = \frac{g\ \operatorname{tg}\alpha}{r} = \frac{g\ \operatorname{tg}\alpha}{R\sin\alpha} = \frac{g}{R\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}.$$

Задача IV.7 Невесомый стержень длиной l, изогнутый, как показано на *рис. IV.7*, вращается с угловой скоростью ω относительно оси AA_1. К концу стержня прикреплен груз массой m. Определить силу, с которой стержень действует на груз.

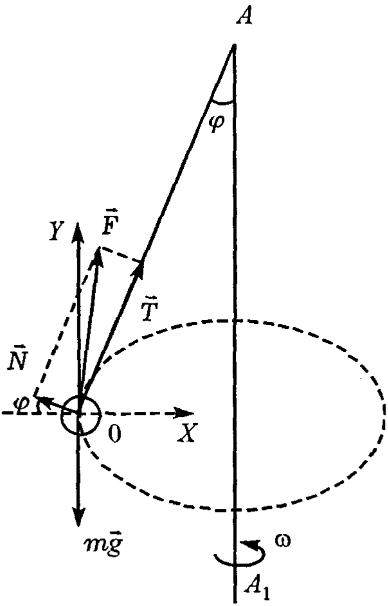

Рис. IV.7

Решение. На груз действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила натяжения стержня $\vec{T}$. Сила $\vec{F}$, с которой стержень действует на груз, является результирующей сил $\vec{N}$ и $\vec{T}$, т. е. $F = \sqrt{T^2 + N^2}$. Для отыскания сил T и N запишем второй закон Ньютона в проекции на оси $0X$ и $0Y$ (см. рис. IV.7)

$$T\sin\varphi - N\cos\varphi = ma_n = m\omega^2 l\sin\varphi;$$

$$T\cos\varphi + N\sin\varphi - mg = 0.$$

Решая эту систему, получаем

$$T = m\left(\omega^2 l\sin^2\varphi + g\cos\varphi\right);$$

$$N = m\left(g - \omega^2 l\cos\varphi\right)\sin\varphi.$$

Таким образом, результирующая сила $\vec{F}$, с которой стержень действует на тело, равна по величине

$$F = \sqrt{T^2 + N^2} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi}.$$

Задача IV.8 Маленький шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. Когда он проходит положение равновесия, нить испытывает натяжение, равное удвоенной силе тяжести шарика (*рис. IV.8*). На какой максимальный угол α от вертикали отклоняется шарик? Сопротивлением воздуха пренебречь.

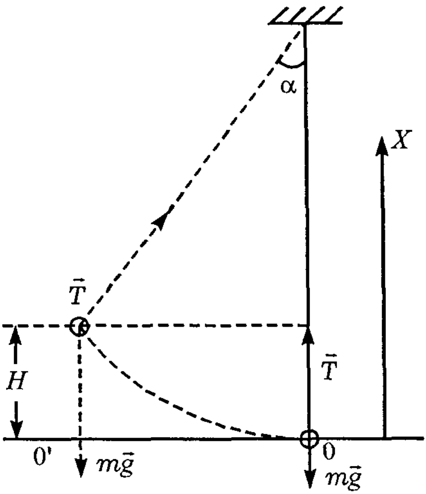

Рис. IV.8

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. В системе тел: шарик – Земля, эти силы являются внутренними и консервативными, поэтому можно применить закон сохранения механической энергии:

$$E_{\text{мех}\,1} = E_{\text{мех}\,2}, \text{ или } E_{\text{к}1} + E_{\text{п}1} = E_{\text{к}2} + E_{\text{п}2}.$$

Выберем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии уровень $00'$, тогда $E_{\text{мех}\,1} = E_{\text{к}1}$, а $E_{\text{мех}\,2} = E_{\text{п}2}$, т. е. кинетическая энергия, которую имел шарик, проходя вертикальное положение, должна равняться потенциальной энергии в точке максимального подъема шарика

$$\frac{mv^2}{2} = mgH\text{, или } H = \frac{v^2}{2g}.$$

Поскольку из рисунка очевидно, что $H = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$, то максимальный угол отклонения определится из этой формулы:

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{l-H}{l}\text{, где } l \text{ — длина нити.}$$

Для определения высоты H необходимо знать скорость шарика при прохождении положения равновесия. Это легко сделать, записав второй закон Ньютона вдоль оси $0X$ в момент прохождения шариком положения равновесия (см. рис.),

$$T - mg = ma_n = \frac{mv^2}{l}\text{, или } v^2 = \frac{(T-mg)l}{m}.$$

Подставив это выражение в формулу, определяющую максимальный угол отклонения шарика, получим

$$\cos\alpha_{\max} = 1 - \frac{H}{l} = 1 - \frac{T-mg}{2mg} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, шарик поднимется на угол $\alpha_{\max} = 60^\circ$.

Задача IV.9 Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины полусферы радиуса R. С какой

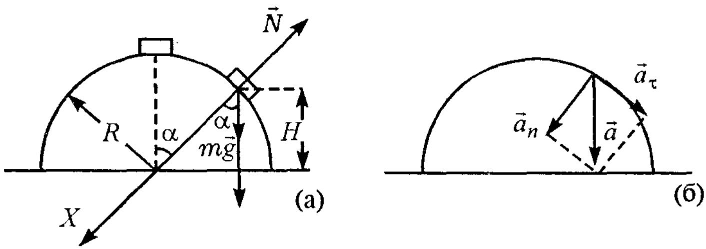

Рис. IV.9

скоростью v и на какой высоте H тело оторвется от поверхности полусферы (*рис. IV.9*)?

Решение. На тело действуют две силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Второй закон Ньютона в векторной записи имеет вид

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}\cdot$$

Следует отметить, что ускорение $\vec{a}$ – это полное ускорение тела, оно направлено в ту же сторону, что и результирующая сила $\vec{F}_р$, равная $\vec{F}_р = \vec{N} + m\vec{g}$. Поскольку полное ускорение $\vec{a}$ равно $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, то оно лежит внутри прямого угла между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$, поэтому и результирующая сила $\vec{F}_р$ должна быть сонаправлена с этим ускорением. Запишем второй закон Ньютона вдоль оси $0X$, направленной вдоль радиуса,

$$mg\cos\alpha - N = ma_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Посмотрим внимательно на это соотношение. При соскальзывании тела его скорость увеличивается. Это может произойти только тогда, когда

$\vec{N}$ уменьшается более сильно, чем $mg\cos\alpha$. Поэтому наступит такой момент, когда $\vec{N}$ обратится в нуль. Это означает, что тело оторвется от поверхности сферы и дальше полетит по параболе. В этот момент времени второй закон Ньютона будет иметь вид

$$mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}. \qquad (1)$$

Высота H, с которой оторвется тело, определяется (см. рис.)

$$H = R\cos\alpha. \qquad (2)$$

Подставив выражение для $\cos\alpha$ в уравнение (1), получим

$$mg\frac{H}{R} = \frac{mv^2}{R}, \text{ или } H = \frac{v^2}{g}. \qquad (3)$$

Задача была бы решена, если бы мы смогли определить скорость в момент отрыва тела от сферы. Это легко сделать, воспользовавшись законом сохранения механической энергии,

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgH, \text{ или } v^2 = 2g(R-H).$$

Подставим это выражение в уравнение (3), тогда

$$H = \frac{2g(R-H)}{g}, \text{ или } H = \frac{2R}{3}.$$

При этом $\cos\alpha$ в момент отрыва равен $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Таким образом, тело оторвется от поверхности на высоте $H = \frac{2}{3}R$, а его скорость в момент отрыва равна

$$v^2 = 2g(R - H) = 2g\left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{2}{3}gR,$$

$$\text{или } v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Как видно, ни высота H, ни скорость v не зависят от массы m, поэтому тело любой массы оторвется от поверхности на одинаковой высоте и с одинаковой скоростью.

Задача IV.10 Шайба массой m скользит без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R. На какой высоте h шайба оторвется от желоба и до какой наибольшей высоты H после этого поднимется, если она начала спускаться по желобу без начальной скорости с высоты $h_1 = 2R$ (*рис. IV.10*)?

Решение. На шайбу действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Обе силы являются внутренними для системы тел: шайба – Земля. Поэтому можно в любой момент времени записать закон сохранения механической энергии. Запишем его в тот момент, когда тело находится в точке максимального подъема H, тогда

$$mgh_1 = mgH + \frac{mv_г^2}{2}.$$

В точке максимального подъема A у тела будет

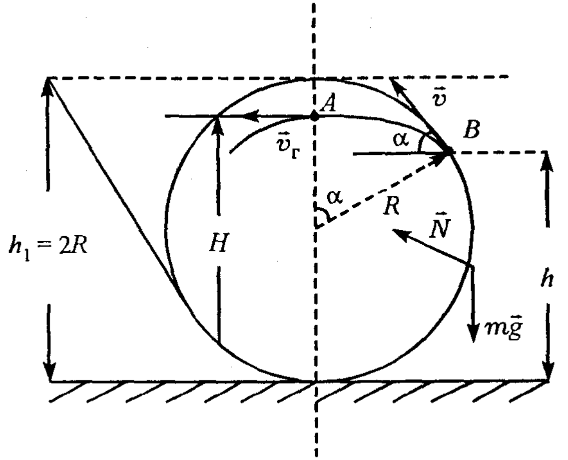

Рис. IV.10

только горизонтальная скорость $\vec{v}_г$, направленная по касательной к траектории. Отсюда

$$H = h_1 - \frac{v_г^2}{2g} = 2R - \frac{v_г^2}{2g}.$$

Таким образом, задача сводится к определению горизонтальной скорости $v_г$ в точке максимального подъема. Эта скорость, как видно из рисунка, равна $v_г = v\cos\alpha$. Значение скорости $\vec{v}$ в точке отрыва шайбы и угол α в момент отрыва мы получили в предыдущей задаче:

$$v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}; \; \cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Подставив эти значения, получим

$$H = 2R - \frac{\frac{2gR}{3}\frac{4}{9}}{2g} = \frac{50}{27}R.$$

Высоту отрыва шайбы от поверхности h также можно определить из закона сохранения механической энергии, записанного для точки отрыва B,

$$mgh_1 = mgh + \frac{mv^2}{2}. \text{ Откуда } h = h_1 - \frac{v^2}{2g} = \frac{5}{3}R.$$

Таким образом, мы ответили на вопросы, поставленные в задаче, воспользовавшись лишь законом сохранения механической энергии.

Задача IV.11 На невесомом стержне длиной l укреплены:

а) масса $2m$ на конце стержня,

б) две равные массы m – одна на конце стержня, другая – посередине стержня (*рис. IV.11*). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки A. Какую горизонтальную скорость в обоих случаях нужно сообщить концу стержня, чтобы он отклонился до горизонтального положения?

Решение. В данной задаче можно применить закон сохранения механической энергии, поскольку сила тяжести и сила натяжения стержня для системы тел: Земля – массы, являются внутренними. Поэтому можно записать

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}.$$

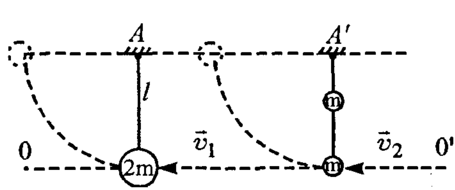

Рис. IV.11

За начало отсчета потенциальной энергии выбираем положение $00'$. Для тела массой $2m$ закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{2mv_1^2}{2} = 2mgl.$$

Отсюда $v_1 = \sqrt{2gl}$.

Для шариков с массами m

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{m\left(\frac{v_2}{2}\right)^2}{2} + mg\frac{l}{2} = mgl + mgl, \quad \text{или}$$

$$\frac{5}{4}v_2^2 = 3gl, \text{ т. е. } v_2 = \sqrt{\frac{12gl}{5}} = \sqrt{2{,}4gl}.$$

За начало отсчета потенциальной энергии можно было бы выбрать и положение AA'. Тогда для шарика массой $2m$ закон сохранения запишется

$$-2mgl + \frac{2mv_1^2}{2} = 0, \text{ или } v_1 = \sqrt{2gl},$$

а для шариков массами m

$$-mgl + \frac{mv_2^2}{2} - mg\frac{l}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{или}$$

$$v_2 = \sqrt{2{,}4gl}.$$

Таким образом, мы показали, что решение задачи не зависит от выбора начального уровня отсчета потенциальной энергии. Следует еще отметить, что шарики массами m связаны единым стержнем и в любой момент времени будут иметь одинаковую угловую скорость ω, поэтому закон сохранения механической энергии можно записать только для двух шариков вместе. Линейные скорости каждого шарика определяются формулой $v = \omega r$, поэтому линейная скорость верхнего шарика в 2 раза меньше линейной скорости нижнего.

Задача IV.12 Тело соскальзывает из точки A в точку B по двум поверхностям с одинаковой кривизной: выпуклой и вогнутой. Коэффициент трения один и тот же. В каком случае скорость тела в точке B больше (*рис. IV.12*)?

Решение. В каждой точке траектории на тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}_{тр}$. Второй закон Ньютона для обоих случаев вдоль радиуса запишется

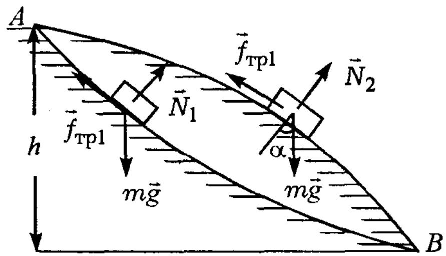

Рис. IV.12

$$mg\cos\alpha - N_2 = \frac{mv_2^2}{R} \text{ или } N_2 = mg\cos\alpha - \frac{mv_2^2}{R};$$

$$mg\cos\alpha - N_1 = -\frac{mv_1^2}{R} \text{ или } N_1 = mg\cos\alpha + \frac{mv_1^2}{R}.$$

Таким образом, при движении тела по выпуклой поверхности реакция опоры $\vec{N}_2$ будет меньше, чем при движении тела по вогнутой поверхности $\vec{N}_1$. А это значит, что сила трения, действующая на тело в каждой точке траектории и равная μN, при движении по выпуклой поверхности будет меньше.

Закон изменения механической энергии запишется

$$\Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{тр};$$

$$-mgh + \frac{mv_{B}^{2}}{2} = A_{тр}, \text{ или}$$

$$\frac{mv_{B}^{2}}{2} = mgh + A_{тр} = mgh - f_{тр}S = mgh - \mu NS.$$

Из этого соотношения следует, что в точке B скорость тела будет больше в том случае, когда работа, затраченная на преодоление сил трения, меньше. Поскольку сила трения при движении по выпуклой поверхности $\vec{N}_2$ меньше, чем $\vec{N}_1$, то скорость в точке B будет больше при движении тела по выпуклой поверхности.

Задача IV.13 Определить кинетическую энергию обруча массой M, движущегося с постоянной скоростью v_0 без проскальзывания (*рис. IV.13*).

Решение. Разобьем весь обруч на малые участки массой Δm каждый. Любой такой участок участвует в двух движениях: поступательном со скоростью v_0 (скорость движения центра обруча) и вращательном со скоростью $v_{л} = \omega R$ (линейная скорость каждой точки обруча). В отсутствие проскальзывания $\omega = \frac{v_0}{R}$, поэтому $v_{л} = v_0$.

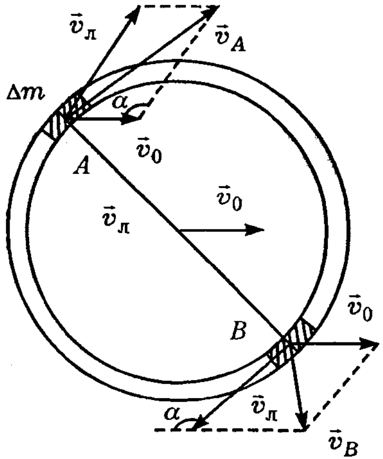

Рис. IV.13

Рассмотрим два диаметрально противоположных участка A и B. Их результирующие скорости равны векторной сумме скоростей поступательного и вращательного движений, т. е. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_л$, тогда

$$v_A^2 = v_0^2 + v_л^2 - 2v_0 v_л \cos\alpha;$$

$$v_B^2 = v_0^2 + v_л^2 + 2v_0 v_л \cos\alpha.$$

Суммарная кинетическая энергия обоих участков равна

$$E_{к\,A,B} = \frac{\Delta m v_A^2}{2} + \frac{\Delta m v_B^2}{2} = \Delta m v_0^2 + \Delta m v_л^2 =$$

$$= \Delta m\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right).$$

Так как это выражение справедливо для любых двух симметричных участков, то для всего обруча можно записать

$$E_к = \sum \Delta E_{к A,B} = \left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right)\sum \Delta m = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{M\omega^2 R^2}{2},$$

т. е. энергия всего обруча состоит из кинетической энергии поступательного движения $E_{пост} = \frac{Mv_0^2}{2}$ и вращательного $E_{вр} = \frac{M\omega^2 R^2}{2}$. Учитывая, что обруч катится без проскальзывания, т.е. $v_л = v_0 = \omega R$, полная кинетическая энергия обруча равна

$$E_к = Mv_0^2.$$

Задача IV.14 На тонкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. В каких точках траектории ускорение шарика направлено строго вертикально и строго горизонтально? В начальный момент нить не растянута (*рис. IV.14*).

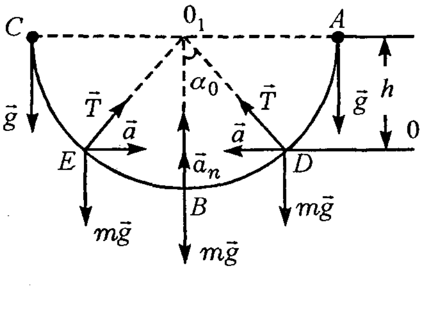

Рис. IV.14

Решение. Из второго закона Ньютона $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ очевидно, что ускорение тела совпадает с направлением результирующей силы. Поэтому ускорение вертикально вниз направлено в крайних верхних точках

A и C (нить не растянута), вертикально вверх в точке B, а горизонтально в точках D и E, положение которых определяется некоторым углом α_0 (см. рис.). Этот угол можно определить, записав второй закон Ньютона вдоль направления радиуса и по вертикали, соответственно

$$T - mg\cos\alpha_0 = ma_n = \frac{mv^2}{l};$$

$$T\cos\alpha_0 - mg = 0.$$

Решая систему уравнений, получим

$$\frac{mv^2}{l} = \frac{mg\left(1 - \cos^2\alpha_0\right)}{\cos\alpha_0}. \qquad (1)$$

Выражение для скорости можно определить из закона сохранения механической энергии.

Если начальный уровень отсчета потенциальной энергии выбрать в точке D, то $mgh = mgl\cos\alpha_0 = \dfrac{mv^2}{2}$ или $v^2 = 2gl\cos\alpha_0$. Подставим это выражение для скорости в уравнение (1), получим

$$2g\cos\alpha_0 = \frac{g\left(1 - \cos^2\alpha_0\right)}{\cos\alpha_0}, \text{ или } 3\cos^2\alpha_0 = 1.$$

Отсюда $\cos\alpha_0 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Это значение $\cos\alpha_0$ соответствует углу $\alpha_0 = 54^\circ 45'$.

Задача IV.15 Сфера радиусом R равномерно вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω. Внутри сферы находится шарик массой m. Определить высоту h, соответствующую положению равновесия шарика относительно сферы. Исследовать положение равновесия на устойчивость (*рис. IV.15*).

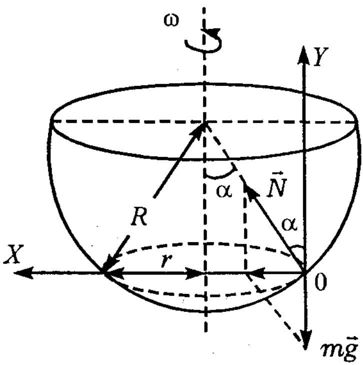

Рис. IV.15

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Эти силы сообщают шарику нормальное ускорение a_n, заставляя шарик двигаться по окружности радиуса

$$r = R\sin\alpha \cdot$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси $0X$ и $0Y$

$$N\sin\alpha = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\alpha\,; \qquad (1)$$

$$N\cos\alpha - mg = 0\,. \qquad (2)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \omega^2 R\sin\alpha\,,$$

или $$\sin\alpha\left(\omega^2 R - \frac{g}{\cos\alpha}\right) = 0\,. \qquad (3)$$

Это уравнение имеет два решения:

а) $\sin\alpha = 0$ (Сокращать на $\sin\alpha$ нельзя, т.к. потеряется одно решение!);

б) $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ – это положение равновесия возможно лишь при условии, что

$$\frac{g}{\omega^2 R} \le 1, \text{ или } \omega \ge \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Причем, это положение равновесия является устойчивым. Действительно, если шарик чуть-чуть опустить вниз (угол α уменьшить), то $\cos\alpha$ увеличивается и тогда вертикальная составляющая реакции опоры $N\cos\alpha > mg$, формула (2), и шарик поднимется (т. е. вернется в положение равновесия. Если же шарик поднять чуть вверх (угол α увеличить), то $\cos\alpha$ уменьшится и $N\cos\alpha < mg$, т. е. шарик опустится в положение равновесия. Высота h в этом положении равна

$$h = R(1-\cos\alpha) = R\left(1-\frac{g}{\omega^2 R}\right).$$

Решение $\sin\alpha = 0$ (α=0) возможно при любой скорости вращения ω. Однако, если $\omega^2 > \frac{g}{R}$, решение неустойчивое (см. формулу (3)), если же $\omega^2 < \frac{g}{R}$, то решение устойчивое.

Задача IV.16 Определить зависимость веса тела P от географической широты, полагая известными угловую скорость вращени Земли ω и ее радиус R.

Решение. Пусть тело находится на поверхности Земли на широте, определяемой углом φ (*рис. IV.16*). При вращении Земли тело массой m движется по окружности радиуса r. На него действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{f}$. Выберем направление осей, как показано на рисунке, и запишем второй закон Ньютона вдоль этих осей:

$$mg\cos\varphi - N\cos\varphi + f\sin\varphi = ma_n = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi;$$

$$-mg\sin\varphi + N\sin\varphi + f\cos\varphi = 0,$$

т. е. тело вдоль оси $0Y$ не перемещается.

Решая эту систему, получим

$$N = mg - m\omega^2 R\cos^2\varphi;$$

$$f = m\omega^2 R\sin^2\varphi.$$

Вес тела $\vec{P}$ по величине равен силе реакции опоры $\vec{N}$ и направлен в противоположную сторону.

Таким образом, вес тела зависит от географической широты и определяется формулой

$$P = N = mg - m\omega^2 R\cos^2\varphi.$$

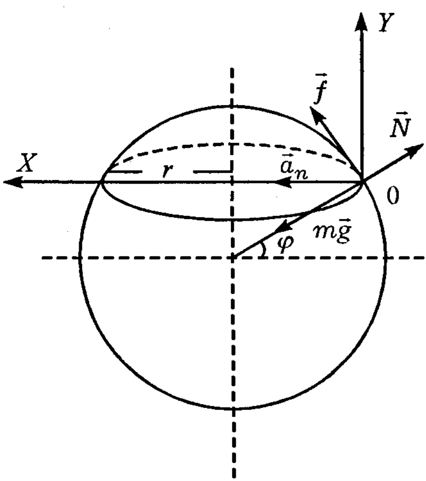

Рис. IV.16

Из этой формулы видно, что на Северном полюсе ($\varphi = 90^\circ$) вес тела равен силе тяжести mg, а на экваторе ($\varphi = 0^\circ$) вес тела равен

$$N = mg - m\omega^2 R.$$

В некоторых учебниках вместо силы трения покоя $\vec{f}$ и силы реакции опоры $\vec{N}$ рассматривают силу $\vec{Q}$, действующую на тело массой m со стороны Земли. Эта сила равна $Q = \sqrt{f^2 + N^2}$.

Порой у учащихся вызывает недоумение введение силы трения покоя $\vec{f}$. Нужно ли ее вводить? Дело в том, что если не рассматривать силу $\vec{f}$, то $\vec{N} + m\vec{g} = 0$, и возникает вопрос: а какая же сила сообщает покоящемуся на Земле телу нормальное ускорение $\vec{a}_n$, с которым оно движется вокруг земной оси.

§ 2. Закон всемирного тяготения

пIV.1 Любые два точечных тела притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила направлена вдоль прямой, соединяющей эти точечные тела.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, равная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг с^2.

пIV.2 Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0 = \dfrac{GM_з}{R_з^2}$. Отсюда $GM_з = g_0 R_з^2$.

Ускорение свободного падения зависит от расстояния от Земли