силу $\vec{Q}$, действующую на тело массой m со стороны Земли. Эта сила равна $Q = \sqrt{f^2 + N^2}$.

Порой у учащихся вызывает недоумение введение силы трения покоя $\vec{f}$. Нужно ли ее вводить? Дело в том, что если не рассматривать силу $\vec{f}$, то $\vec{N} + m\vec{g} = 0$, и возникает вопрос: а какая же сила сообщает покоящемуся на Земле телу нормальное ускорение $\vec{a}_n$, с которым оно движется вокруг земной оси.

§ 2. Закон всемирного тяготения

пIV.1 Любые два точечных тела притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила направлена вдоль прямой, соединяющей эти точечные тела.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, равная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/\text{кг с}^2$.

пIV.2 Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0 = \frac{GM_з}{R_з^2}$. Отсюда $GM_з = g_0 R_з^2$.

Ускорение свободного падения зависит от расстояния от Земли

$$g(h)=\frac{GM_з}{\left(R_з+h\right)^2}=\frac{g_0R_з^2}{\left(R_з+h\right)^2}.$$

пIV.3 Тело, находящееся в поле Земли, обладает потенциальной энергией. Начальный уровень отсчета потенциальной энергии можно взять любой, поскольку изменение потенциальной энергии не зависит от выбора этого уровня.

Так как сила гравитации зависит от расстояния и, строго говоря, не является постоянной, то формулу для работы $A=F_{гр}\Delta r$ применять нельзя. Однако работу можно посчитать графически. Для этого разобьем участок r_0-r на очень малые отрезки, в пределах которых силу гравитации можно считать постоянной (*рис. IV.17*). Тогда полная работа на участке r_0-r равна

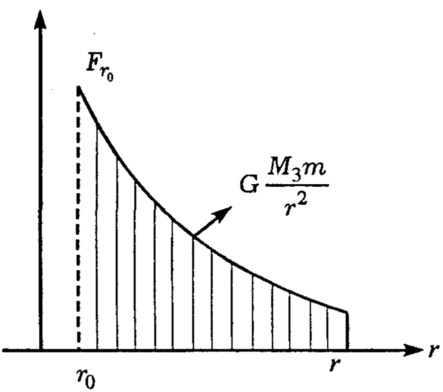

Рис. IV.17

$$A=\sum A_i=\sum\frac{GM_зm|\Delta r|}{r^2}.$$

Если $\Delta r\to 0$, то предел, к которому стремится эта сумма, определяется

$$\lim_{\Delta r \to 0} \sum \frac{GM_з m \Delta r}{r^2} = \int_{r_0}^{r} F_{гр} dr \text{, или}$$

$$A = \Delta E_п = \int_{r_0}^{r} F_{гр} dr = \int_{r_0}^{r} \frac{GM_з m}{r^2} dr = -\frac{GM_з m}{r}\bigg|_{r_0}^{r} = -GM_з m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

где r_0 и r – расстояния, отсчитываемые от центра Земли. В частности, если за начало отсчета выбрать поверхность Земли ($r_0 = R_з$), а $r = R_з + h$, то изменение потенциальной энергии определится

$$\Delta E_п = -GM_з m\left(\frac{1}{R_з + h} - \frac{1}{R_з}\right) = \frac{GM_з mh}{R_з(R_з + h)}. \quad (1)$$

Для $h << R_з$ это уравнение запишется

$$\Delta E_п = \frac{g_0 R_з^2 mh}{R_з^2} = mg_0 h.$$

Однако часто начальный уровень отсчета выбирается в бесконечности, т. е. ($r_0 \to \infty$), тогда

$$\Delta E_п = -GM_з m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -\frac{GM_з m}{r} = -F_{гр} r. \quad (2)$$

Из формулы видно, что эта энергия отрицательная. Поскольку начальный уровень отсчета находится в бесконечности ($r_0 \to \infty$), то тело лежит «ниже» нулевого уровня отсчета.

Задача IV.17 Угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца $\omega = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад/сут. Расстояние от Солнца $R_{З.С} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Определить массу Солнца.

Решение. На Землю со стороны Солнца действует сила гравитации, которая и сообщает ей центростремительное ускорение a_n, т. е. второй закон Ньютона вдоль радиуса имеет вид

$$\frac{Gm_З M_С}{R_{З.С}^2} = m_З a_n = m_З \omega^2 R_{З.С}.$$

Следовательно, масса Солнца равна

$$M_С = \frac{\omega^2 R_{З.С}^2}{G} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{27} \text{ т}.$$

Задача IV.18 Радиус Луны в n=3,7 раза меньше радиуса Земли, а ее масса в m=81 раз меньше массы Земли. Определить ускорение свободного падения на поверхности Луны.

Решение. Для поверхности Земли можно записать

$$mg_0 = \frac{GmM_З}{R_З^2}, \text{ или } g_0 = \frac{GM_З}{R_З^2}.$$

Очевидно, аналогичное соотношение выполняется и для поверхности Луны, т. е.

$$g_Л = \frac{GM_Л}{R_Л^2}.$$

Если поделить одно уравнение на другое, то получим

$$\frac{g_0}{g_Л} = \frac{M_З R_Л^2}{R_З^2 M_Л}.$$

Отсюда

$$g_{\text{л}} = g_0\left(\frac{R_{\text{з}}}{R_{\text{л}}}\right)^2 \Bigg/ \left(\frac{M_{\text{з}}}{M_{\text{л}}}\right) = g_0\,\frac{n^2}{m^2} = 1{,}65\,\text{м/с}^2\,.$$

Задача IV.19 Какой период вращения T имел бы искусственный спутник Земли, удаленный от нее на расстояние h. Радиус Земли $R_{\text{З}}$ и ускорение свободного падения на Земле g_0 считать известными.

Решение. На спутник действует сила гравитации $\vec{F}$, которая сообщает ему центростремительное ускорение a_n, т. е.

$$\frac{Gm_{\text{C}}M_{\text{з}}}{\left(R_{\text{з}}+h\right)^2} = m_{\text{C}}a_n = \frac{m_{\text{C}}v^2}{R_{\text{з}}+h}.$$

Таким образом, спутник вращается вокруг Земли со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{з}}}{R_{\text{з}}+h}}\,.$$

Так как на поверхности Земли для тела массой m можно записать

$$mg_0 = \frac{GmM_{\text{з}}}{R_{\text{з}}^2},$$

то отсюда легко определить произведение $GM_{\text{з}} = g_0R_{\text{З}}^2$. Величины g_0 и $R_{\text{З}}$, стоящие в правой части уравнения, мы знаем. Тогда скорость вращения спутника вокруг Земли будет иметь вид

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_з^2}{R_з + h}} = R_з \sqrt{\frac{g_0}{R_з + h}}.$$

Период вращения спутника

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \frac{v}{R_з + h}.$$

Следовательно,

$$T = \frac{2\pi(R_з + h)}{v} = \frac{2\pi(R_з + h)^{3/2}}{R_з\sqrt{g_0}}.$$

Задача IV.20 Вычислить силу тяготения, действующую на материальную точку массой m, находящуюся внутри Земли на расстоянии r от центра. Радиус Земли – $R_з$. Плотность Земли ρ считать постоянной (*рис. IV.18*).

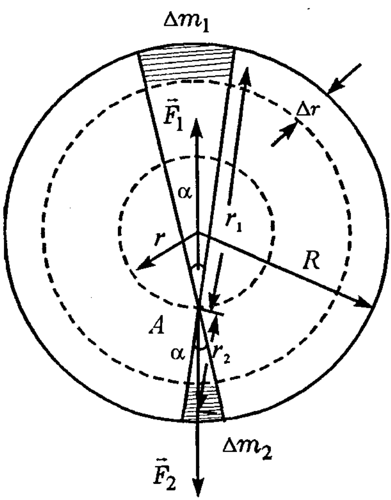

Рис. IV.18

Решение. Поместим тело массой m внутри Земли в произвольной точке A. Мысленно разобьем Землю на тонкие шаровые слои толщиной Δr $(\Delta r <<< R_з)$ и рассмотрим один из них. Проведем конус с малым углом раствора через выбранную точку A (см. рис.). Конус вырежет из шарового слоя массы Δm_1 и Δm_2. Тогда на точечное тело массой m действуют две силы притяжения со стороны Δm_1 и Δm_2, т. е.

$$F_1 = \frac{Gm\Delta m_1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{Gm\Delta m_2}{r_2^2},$$

причем $\Delta m_1 = \rho S_1 \Delta r$ и $\Delta m_2 = \rho S_2 \Delta r$, где Δr – толщина тонкого сферического слоя, S_1 и S_2 – вырезанные конусом площадки этих слоев. Подставив выражение для Δm_i, получим

$$F_1 = \frac{Gm\rho S_1 \Delta r}{r_1^2} = Gm\rho\Delta r\alpha \quad \text{и}$$

$$F_2 = \frac{Gm\rho S_2 \Delta r}{r_2^2} = Gm\rho\Delta r\alpha,$$

где α – телесный угол, по определению равный $\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}$. Таким образом, $\frac{F_1}{F_2} = 1.$

Силы притяжения со стороны масс Δm_1 и Δm_2 равны по величине и противоположны по направлению, а это значит, что результирующая сила, действующая на тело массой m, равна нулю. Так как точку A можно выбрать произвольным образом, то очевидно, что результирующая сила притяжения, действующая со стороны всего внешнего слоя толщиной Δr, равна нулю. Поэтому на материальную точку, помещенную на некотором расстоянии r от центра, внутри Земли действует только сила притяжения массы Земли, находящейся внутри сферы радиуса r (M_r). Таким образом,

$$F_{\text{гр}} = \frac{GM_r m}{r^2} = \frac{G\rho V_r m}{r^2} = \frac{G\rho \,^4\!/_3\, \pi r^3 m}{r^2} = \frac{GM_з \,^4\!/_3\, \pi r m}{V_з} =$$

$$= \frac{GM_з \,^4\!/_3\, \pi r m}{^4\!/_3\, \pi R_з^3} = \frac{GM_з r m}{R_з^3} = \frac{g_0 R_з^2 r m}{R_з^3} = \frac{m g_0 r}{R_з},$$

т. е. сила притяжения, действующая на материальную точку массой m, помещенную внутрь Земли, линейно зависит от расстояния r.

График зависимости силы гравитации от расстояния r имеет вид, показанный на рисунке IV.19.

Задача IV.21 Ракете, находящейся на поверхности Земли, сообщена вертикальная скорость $v_0 = 6\,\text{км/с}$. Считая, что сопротивление воздуха отсутствует, найти максимальную высоту подъема ракеты. Радиус Земли $R_з = 6400\,\text{км}$.

Решение. На ракету действует только сила тяжести. Для системы: ракета — Земля, она является внутренней и консервативной силой, поэтому можем применить закон сохранения механической энергии, т. е. $\Delta E_к + \Delta E_п = 0$

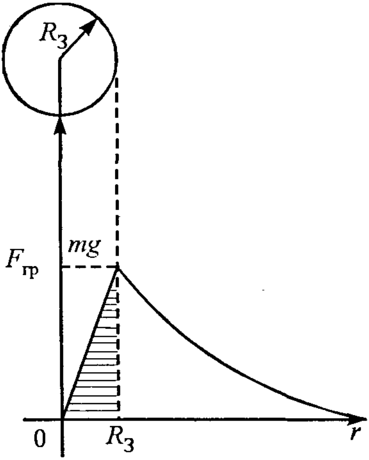

Рис. IV.19

или $-\dfrac{mv_0^2}{2}-\left(E_{к.п}-E_{п\,0}\right)=0$ и $\dfrac{mv_0^2}{2}=E_{п\,0}-E_{к.п}$,

где $E_{к.п}$ — конечная потенциальная энергия ракеты на высоте максимального подъема H, а $E_{п\,0}$ — начальная потенциальная энергия ракеты на поверхности Земли. Воспользовавшись формулой (1), пIV.3, запишем

$$\frac{mv_0^2}{2}=mgR_0^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right),$$ откуда

$$H=\frac{v_0^2R_з}{2gR_з-v_0^2}=\frac{\left(6\cdot10^3\ \text{м/с}\right)^2\cdot6400\cdot10^3\ \text{м}}{2\cdot10\ \text{м/с}\cdot6400\cdot10^3\ \text{м}-\left(6\cdot10^3\ \text{м/с}\right)^2}=2500\ \text{км}.$$

Следует отметить, что в этой задаче нельзя пользоваться формулой для максимальной высоты подъема, полученной из кинематики, $H=\dfrac{v_0^2}{2g}$, так как на больших расстояниях от поверхности Земли, сравнимых с ее радиусом, сила тяжести и ускорение g не являются постоянной величиной, а изменяются с высотой. Действительно,

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 1800\,\text{км} \ \ (\text{а не } 2500\ \text{км!}).$$

Задача IV.22 Какую работу нужно совершить, чтобы запустить спутник массой m по круговой орбите на высоту $H = 3200$ км?

Решение. Тело, находящееся в гравитационном поле Земли, обладает потенциальной энергией, которую можно отсчитывать либо от центра Земли, либо от какого-нибудь другого уровня (пIV.3). В математическом отношении наиболее удобно за начальный уровень отсчета взять $r_0 \to \infty$ (расстояние r отсчитывается от центра Земли). Тогда выражение для потенциальной энергии оказывается наиболее простым — это формула (2) пIV.3

$$E_{\text{п}} = -\frac{GM_{\text{з}}m}{r}.$$

На высоте H спутник должен обладать не только потенциальной энергией, но еще и кинетической, поскольку на орбите он вращается с первой космической скоростью $v_{\text{к}} = R_{\text{з}}\sqrt{\dfrac{g_0}{R_{\text{з}} + H}}$. Поэтому, чтобы запустить спутник по круговой орбите, нужно совершить работу

$$A = A_1 + A_2 = \Delta E_п + \Delta E_к =$$

$$= -\frac{GM_з m}{R_з + H} - \left(-\frac{GM_з m}{R_з}\right) + \frac{mv_к^2}{2} - 0 =$$

$$= GM_з m\left(\frac{1}{R_з} - \frac{1}{R_з + H}\right) + \frac{m}{2} R_з^2 \frac{g_0}{R_з + H} =$$

$$= \frac{mgR_з^2 g_0}{2(R_з + H)} + \frac{mR_з^2 g_0}{2(R_з + H)} = \frac{mg_0 R_з^2}{R_з + H}.$$

Мы воспользовались известным соотношением

$$g_0 = \frac{GM_з}{R_з^2} \quad (\text{пIV.2}).$$

Задача IV.23 По оси вращения земного шара пробуравлена шахта и в нее падает тело. Определить максимальную скорость тела (сопротивление воздуха не учитывать).

Решение. Для тела массой m, падающего в шахту, ускорение a зависит от расстояния от центра Земли r: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{mg_0}{m}\dfrac{r}{R_з} = g_0\dfrac{r}{R_з}$ (см. задачу IV.20). Из этой формулы видно, что ускорение максимально при $r = R_з$ и обращается в нуль в центре Земли ($r = 0$). Это означает, что скорость падающего тела максимальна именно при $r = 0$. После того как тело пролетит через центр Земли, его ускорение поменяет знак (будет направлено противоположно скорости) и скорость начнет уменьшаться.

Для определения максимальной скорости нужно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_{п(r=0)} + E_{к(r=0)} = E_{п(r=R_З)} + E_{к(r=R_З)}.$$

Выбирая центр Земли за начальный уровень отсчета потенциальной энергии тела на поверхности Земли, можно записать:

$$E_{к(r=0)} = E_{п(r+R_З)}, \quad \text{или} \quad E_п = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

С другой стороны, потенциальная энергия тела на поверхности Земли равна работе, которую необходимо затратить при медленном переносе тела из центра Земли на ее поверхность. Но так как сила гравитации не остается постоянной, а меняется по линейному закону, то работу проще определить из рис. IV.19. Она численно равна площади заштрихованного треугольника, т.е. $E_п = \frac{mg_0R_З}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$. Следовательно,

$$v_{max} = \sqrt{g_0R_З}.$$

V. СТАТИКА

§ 1. Статика твердых тел

Статика твердых тел – раздел механики, изучает условия равновесия твердых протяженных тел.