лено противоположно скорости) и скорость начнет уменьшаться.

Для определения максимальной скорости нужно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_{п(r=0)} + E_{к(r=0)} = E_{п(r=R_з)} + E_{к(r=R_з)}.$$

Выбирая центр Земли за начальный уровень отсчета потенциальной энергии тела на поверхности Земли, можно записать:

$$E_{к(r=0)} = E_{п(r+R_з)}, \text{ или } E_п = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

С другой стороны, потенциальная энергия тела на поверхности Земли равна работе, которую необходимо затратить при медленном переносе тела из центра Земли на ее поверхность. Но так как сила гравитации не остается постоянной, а меняется по линейному закону, то работу проще определить из рис. IV.19. Она численно равна площади заштрихованного треугольника, т.е. $E_п = \frac{mg_0R_з}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$. Следовательно,

$$v_{max} = \sqrt{g_0R_з}.$$

V. СТАТИКА

§ 1. Статика твердых тел

Статика твердых тел — раздел механики, изучает условия равновесия твердых протяженных тел.

пV.1 Абсолютно твердое тело — это тело, в котором расстояние между любыми двумя точками остается неизменным при любых условиях. В абсолютно твердом теле можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия, при этом результат действия силы никак не изменяется.

пV.2 Момент силы относительно какой-либо оси — это произведение силы F на кратчайшее расстояние от точки закрепления тела до линии действия силы. Это расстояние называется плечом и обозначается l. Момент силы равен

$$M=Fl.$$

пV.3 Тело, закрепленное на оси, находится в равновесии, если сумма моментов всех действующих на тело сил с учетом их знака равна нулю. Для равновесия любого твердого тела необходимо, чтобы сумма всех действующих на тело внешних сил была равна нулю и сумма моментов всех внешних сил относительно любой оси была также равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \ \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

пV.4 Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется центром тяжести тела. Координаты центра тяжести определяются

$$X_{\text{ц.т}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \ Y_{\text{ц.т}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \ Z_{\text{ц.т}} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

При решении задач на статику мы также будем пользоваться некоторой последовательностью действий (алгоритмом).

1. Прежде всего нарисуем рисунок, отражающий условие задачи (он позволяет лучше представить это условие), и стрелочками обозначим все силы, действующие на тело. В этом разделе силы, как правило, приложены к разным точкам тела.

2. Запишем условия равновесия тела

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0. \qquad (2)$$

Для решения некоторых задач достаточно бывает только условия (1). Это условие справедливо и для любых выбранных вами осей координат. Если же его не хватает, то используем условие (2). Так как условие (2) справедливо для любой оси вращения, то выбирать ее нужно так, чтобы облегчить решение задачи. Лучше всего поместить ось в точку приложения неизвестных сил (или на линии их действия), тогда момент этих сил обращается в нуль.

3. Когда число уравнений будет равно числу неизвестных в задаче величин, тогда можно приступать к алгебраическому их решению. Ответ получаем в буквенном виде и только после этого в полученные формулы подставляем числовые значения заданных величин.

B, поскольку в этом случае сумма моментов не может быть равной нулю (оба момента будут иметь одинаковый знак $\sum M_i \neq 0$). Поэтому точка приложения результирующей силы F может лежать либо слева от точки A, либо справа от точки B.

Будем отсчитывать расстояние x от точки A вправо, тогда условие для моментов сил запишется

$$F_1 \sin\alpha \cdot x - F_2 \sin\alpha \cdot (x - d) = 0, \text{ или}$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_2 - F_1} = 2{,}5\,\text{м}.$$

Если бы точка приложения силы F лежала слева от точки A, то числовое значение x было бы отрицательным.

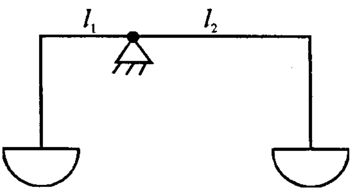

Рис. V.6

Задача V.6 При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чаше получился равным P_1, а на другой – P_2. Определить истинный вес тела P (*рис. V.6*).

Решение. Запишем условие равенства моментов для двух взвешиваний

$$P_1 l_1 = P l_2; \; P l_1 = P_2 l_2,$$

где P – истинный вес тела. Тогда, поделив эти соотношения друг на друга, получим

Как зависит сила натяжения веревки $\vec{T}$ от угла α? При каких условиях сила натяжения на участках AB и AC будет больше, чем на участке AD?

Решение. Так как точка A находится в равновесии, то для нее второй закон Ньютона будет иметь вид

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0.$$

В проекции на ось $0X$ это соотношение запишется

$$F - 2T\cos\frac{\alpha}{2} = 0, \text{ или } T = \frac{F}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

С увеличением угла α натяжение нити T увеличивается. При $\cos\alpha < \frac{1}{2}$ (угол $\frac{\alpha}{2} > 60^\circ$, а угол $\alpha > 120^\circ$) сила натяжения T будет больше силы F.

Задача V.3 Фонарь массой m = 20 кг подвешен на двух одинаковых тросах, угол между которыми α =120° Определить натяжение тросов (*рис. V.3*).

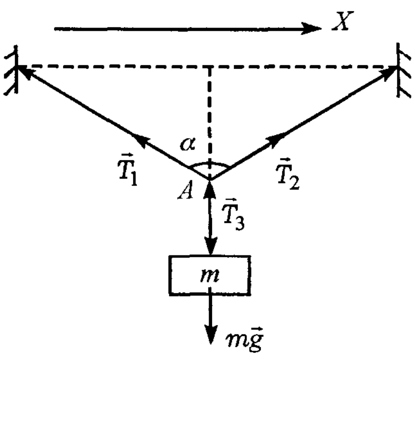

Рис. V.3

Решение. Так как фонарь находится в равновесии, то $mg - T_3 = 0$, или $T_3 = mg$. Для равновесия фонаря необходимо, чтобы сумма всех сил, действующих на точку A в горизонтальном и вертикальном направлениях была, равна нулю, т. е.

$$T_2 \sin\frac{\alpha}{2} - T_1 \sin\frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$T_1 \cos\frac{\alpha}{2} + T_2 \cos\frac{\alpha}{2} - T_3 = 0.$$

Первое равенство означает, что натяжение тросов должно быть одинаковым, т. е. $T_1 = T_2 = T$.

Второе равенство позволяет определить это натяжение:

$$2T\cos\frac{\alpha}{2} = T_3 = mg, \text{ следовательно}$$

$$T = \frac{mg}{2\cos{}^{\alpha}/_{2}} = \frac{20\,\text{кг}\cdot 9{,}8\,\text{м/с}}{2\cos 60^\circ} = 196\,\text{Н}.$$

Посмотрев внимательно на полученное соотношение, можно увидеть, что натянуть трос так, чтобы он не провисал, нельзя никогда! Так как в этом случае $\cos{}^{\alpha}/_{2} \to 0$, а натяжение тросов T должно быть бесконечным.

Задача V.4 Система, состоящая из неподвижного и подвижного невесомых блоков, находится в равновесии (*рис. V.4*). При каком соотношении масс это равновесие выполняется? Нарушится ли равновесие, если точку закрепления веревки A сместить вправо?

Решение. Так как система находится в равновесии, то сила натяжения нити $\vec{T}$, действую-

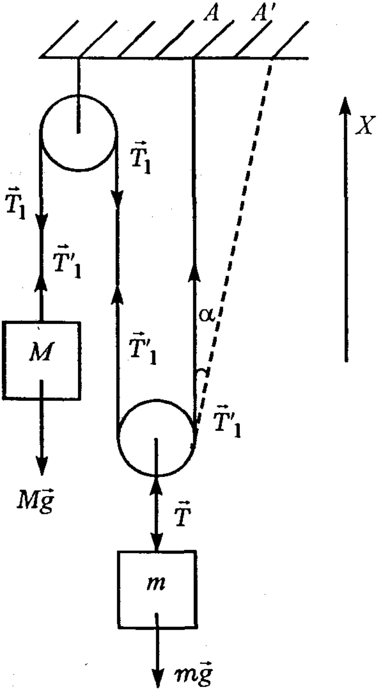

Рис. V.4

щая на массу m, равна $m\vec{g}$ $(T - mg = 0)$. Запишем второй закон Ньютона для невесомого подвижного блока в проекции на ось $0X$ $2T_1 - T = 0$. Следовательно, $T_1 = \frac{T}{2} = \frac{mg}{2}$.

Для тела массой M второй закон Ньютона имеет вид

$$T_1 - Mg = 0, \text{ или}$$

$$T_1 = Mg = \frac{mg}{2}.$$

Отсюда $M = \frac{m}{2}$, т.е. равновесие возможно, когда масса левого груза в 2 раза меньше массы правого груза. При перенесении веревки вправо от точки закрепления A равновесие нарушится, так как теперь по вертикали второй закон Ньютона для подвижного блока запишется

$$T_1 + T_1\cos\alpha - T < 0, \text{ или } T_1 + T_1\cos\alpha < T = mg.$$

Таким образом, правый груз, укрепленный на подвижном блоке, опустится вниз.

Задача V.5 На стержень действуют две параллельные силы $F_1 = 10\text{Н}$ и $F_2 = 25\text{Н}$, направленные в противоположные стороны под углом α к горизонту (*рис. V.5*). Определить точку приложения и величину силы $\vec{F}$, уравновешивающей $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если точки приложения сил F_1 и F_2 расположены друг от друга на растоянии d=1,5 м.

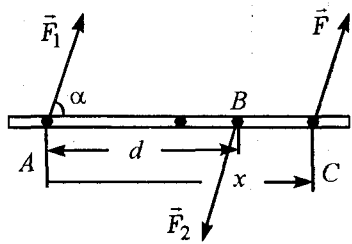

Рис. V.5

Решение. Для равновесия стержня необходимо, чтобы:

1) сумма всех действующих на стержень сил была равна нулю,

2) сумма всех моментов сил относительно оси, проходящей через любую неподвижную точку, также была равна нулю.

Из первого требования следует $\vec{F}_1 + \vec{F} + \vec{F}_2 = 0$. Выбрав положительное направление, совпадающее с направлением силы $\vec{F}_1$, получим $F_1 + F - F_2 = 0$. Следовательно, $F = F_2 - F_1 = 15$Н. Сила $F > 0$, это означает, что результирующая сила $\vec{F}$ сонаправлена с силой $\vec{F}_1$. Далее определим точку приложения результирующей силы $\vec{F}$. Удобнее всего это сделать, если записать второе требование относительно оси, проходящей именно через точку приложения результирующей силы. В этом случае ее момент относительно этой точки равен нулю, а моменты сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ должны уравновешивать друг друга. Точка приложения силы $\vec{F}$ не может находиться между точками A и

B, поскольку в этом случае сумма моментов не может быть равной нулю (оба момента будут иметь одинаковый знак $\sum M_i \neq 0$). Поэтому точка приложения результирующей силы F может лежать либо слева от точки A, либо справа от точки B.

Будем отсчитывать расстояние x от точки A вправо, тогда условие для моментов сил запишется

$$F_1 \sin\alpha \cdot x - F_2 \sin\alpha \cdot (x - d) = 0, \text{ или}$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_2 - F_1} = 2{,}5\,\text{м}.$$

Если бы точка приложения силы F лежала слева от точки A, то числовое значение x было бы отрицательным.

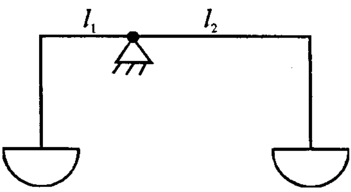

Рис. V.6

Задача V.6 При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чаше получился равным P_1, а на другой – P_2. Определить истинный вес тела P (*рис. V.6*).

Решение. Запишем условие равенства моментов для двух взвешиваний

$$P_1 l_1 = P l_2; \; P l_1 = P_2 l_2,$$

где P – истинный вес тела. Тогда, поделив эти соотношения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{P}{P_2}, \text{ или } P = \sqrt{P_1 P_2}.$$

Задача V.7 На правой чаше больших равноплечих рычажных весов стоит человек массой m, который уравновешен грузом, положенным на другую чашу. К середине правого плеча весов в точке C привязана веревка (*рис. V.7*). Нарушится ли равновесие, если человек, стоящий на чаше весов, начнет тянуть за веревку с силой $\vec{F}$ под углом α к вертикали? Длина коромысла весов $2l$.

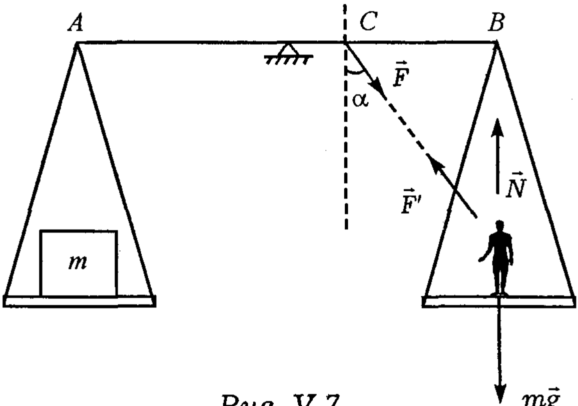

Рис. V.7

Решение. На точку B коромысла весов действует вес тела P, приложенный к правой чаше весов. Он равен по величине силе реакции опоры N, но направлен в противоположную сторону. Когда человек стоит спокойно на чаше, то $P = N = mg$, когда же человек тянет за веревку, то $P = N = mg - F\cos\alpha$ (см. рис.). Поэтому момент силы, созданный весом тела, в первом случае будет равен $M_1 = mgl$, а во втором случае $M_2 = (mg - F\cos\alpha)l$. Кроме того, сила $\vec{F}$, приложенная в точке C, также создает свой момент $M_3 = F\cos\alpha \cdot \frac{l}{2}$.

Таким образом, когда человек стоит спокойно (не тянет веревку), на правую часть коромысла AB действует момент силы $M_1 = mgl$, уравновешенный моментом сил, действующих на левую часть коромысла. Когда же человек тянет за веревку с силой $\vec{F}$, на правую часть коромысла действует момент сил равный

$$M = M_2 + M_3 = (mg - F\cos\alpha)l + F\cos\alpha \cdot \frac{l}{2} = mgl - \frac{Fl\cos\alpha}{2}.$$

Этот момент сил меньше момента силы тяжести (M_1) груза m , т. е.

$$mgl > mgl - \frac{Fl}{2}\cos\alpha,$$

поэтому равновесие нарушится, левая чаша весов перетянет.

Задача V.8 С помощью показанной на *рис. V.8* системы невесомых блоков хотят поднять бревно длиной l и массой M. Какую силу $\vec{F}$ нужно приложить к концу каната A? Как нужно прикрепить концы каната B и C, чтобы бревно при подъеме было горизонтально? Нити невесомы.

Решение. Так как нить невесома, то натяжение каната T, привязанного к точке C, равно силе F. На бревно действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$ и силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}$ (см. рис.). Для того чтобы бревно находилось в равновесии,

$$\vec{T}_1 + \vec{T} + M\vec{g} = 0 \cdot$$

Записав этот закон в проекции на вертикальное направление, получим

$$T_1 + T - Mg = 0. \qquad (1)$$

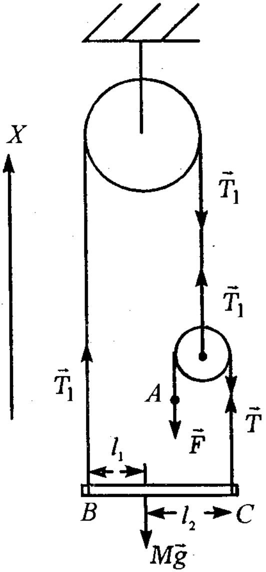

Рис. V.8

Силу натяжения $\vec{T}$ можно определить из второго закона Ньютона, записанного для правого блока. Действительно,

$$T_1 - F - T = 0, \qquad (2)$$

или $T_1 = F + T = 2F$. Подставив значение силы T_1 в уравнение (1), получим

$$2F + F - Mg = 0, \text{ или } 3F = Mg.$$

Таким образом $F = \dfrac{Mg}{3}$. Следовательно, для подъема бревна нужно в такой системе приложить силу $\vec{F}$ в 3 раза меньшую, чем его сила тяжести. Для равновесия бревна еще необходимо, чтобы сумма моментов относительно какой-либо оси вращения была равна нулю. Выберем ось, проходящую через центр тяжести бревна. В этом случае

$$T_1 l_1 - T l_2 = 0,$$

где l_1 и l_2 — расстояния точек B и C соответственно от центра тяжести бревна, тогда

$$\frac{T_1}{T} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{2F}{F} = 2.$$

Если расстояние между точками В и С равно l, то $l_1 + l_2 = l$, а $\frac{l_2}{l_1} = 2.$

Решая эту систему, получим

$$l_1 = \frac{l}{3};\ l_2 = \frac{2l}{3}.$$

При этом условии точка приложения результирующей сил натяжения $T_1 = 2F$ и $T=F$ совпадает с центром тяжести и бревно будет подниматься, оставаясь горизонтальным.

Задача V.9 Две тонкие и однородные палочки массой M и m образуют систему, изображенную на *рис. V.9*. Палочки могут вращаться вокруг осей, проходящих через точки A и B. Верхние концы палочек лежат один на другом под прямым углом. При каком минимальном значении коэффициента трения между палочками правая палочка не упадет? Угол α задан.

Решение. Силы, действующие на верхние концы палочек, изображены на рис. V.9: $\vec{f}$ — силы трения, $\vec{N}$ — силы реакции опоры со стороны каждой палочки. На нижние концы палочек в точках A и B действуют силы со стороны шарниров, однако их направление нам пока неизвестно. Имен-

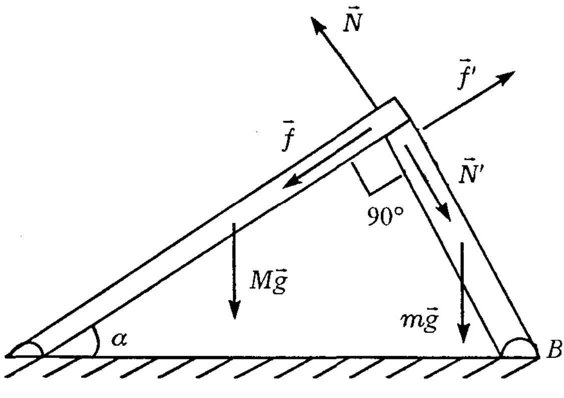

Рис. V.9

но поэтому удобно оси вращения для моментов сил выбрать в точках A и B, проходящих через нижние концы палочек. Тогда уравнения моментов для обоих палочек запишется

$$Mg\frac{l_1}{2}\cos\alpha - Nl_1 = 0\text{, или } N = \frac{Mg}{2}\cos\alpha;$$

$$mg\frac{l_2}{2}\sin\alpha = fl_2\text{, или } f = \frac{mg}{2}\sin\alpha,$$

где l_1 и l_2 – длины левой и правой палочки соответственно.

Так как палочки покоятся, то сила трения f – сила трения покоя, поэтому $f \le \mu N$. Минимальное значение коэффициента трения μ, при котором палочки находятся в равновесии, равен

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача V.10 На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения между ними они раскатятся (*рис. V.10*)? (По земле бревна не скользят.)

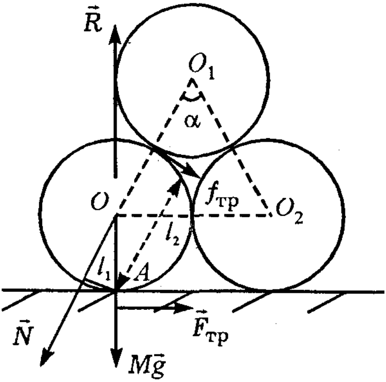

Рис. V.10

Решение. Рассмотрим левое нижнее бревно. На каждое бревно действуют пять сил: сила тяжести $M\vec{g}$, сила давления $\vec{N}$, сила реакции опоры со стороны Земли $\vec{R}$, сила трения $\vec{f}_{тр}$ со стороны верхнего бревна и сила трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны Земли. Полагаем, что нижние бревна лежат вплотную, но не касаются. Второй закон Ньютона для каждого бревна имеет вид

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_{тр} + \vec{f}_{тр} = 0.$$

Запишем условие для моментов сил относительно оси вращения, проходящей через точку A. Тогда момент силы тяжести $M\vec{g}$, момент силы $\vec{R}$ и момент силы трения $\vec{F}_{тр}$ обратятся в нуль, поэтому условие для моментов запишется

$$Nl_1 - f_{тр}l_2 = 0,$$

где l_1 и l_2 плечи соответствующих сил (см. рис.), причем

$$l_1 = R\sin\frac{\alpha}{2};\;\; l_2 = R + R\cos\alpha,$$

где $\alpha = 60^\circ$ – угол при вершине равностороннего треугольника O_1OO_2. Таким образом,

$$\frac{f_{тр}}{N} = \frac{l_1}{l_2},\text{ или}$$

$$\frac{\mu N}{N} \geq \frac{R\sin{}^{\alpha}\!/_{2}}{R\left(1+\cos{}^{\alpha}\!/_{2}\right)} = \frac{1}{2\left(1+{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Задача V.11 Однородная балка массой M и длиной l подвешена на концах двух пружин жесткостью k_1 и k_2 соответственно. Обе пружины в ненагруженном состоянии имеют одинаковую длину. На каком расстоянии x от левого конца балки надо подвесить груз массой m, чтобы балка приняла горизонтальное положение (*рис. V.11*)?

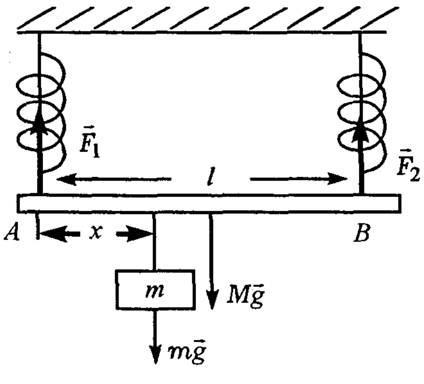

Рис. V.11

Решение. Для того чтобы балка находилась в горизонтальном положении, удлинения обеих пружин должны быть одинаковыми, т. е. $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. На балку действуют четыре силы, указанные на рисунке: силы тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$ и силы натяжения пружин $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Поскольку все силы действуют по вертикали, запишем первое условие равновесия для балки вдоль вертикального направления

$$mg + Mg - F_1 - F_2 = 0, \text{ или}$$

$$mg + Mg = (k_1 + k_2)\Delta x.$$

Отсюда $\Delta x = \dfrac{(m+M)g}{k_1 + k_2}$. Таким образом,

$$F_1 = \frac{k_1(m+M)g}{k_1 + k_2}, \quad F_2 = \frac{k_2(m+M)g}{k_1 + k_2}.$$

Для определения расстояния x запишем момент сил относительно оси, проходящей через точку закрепления левой пружины A (второе условие равновесия балки),

$$mgx + Mg\frac{l}{2} - F_2 l = 0.$$

Из этого соотношения следует

$$x = \frac{F_2 l - Mg\, l/2}{mg} = \frac{k_2(m+M)gl}{mg(k_1 + k_2)} - \frac{Mgl}{2mg} = \frac{l}{m}\left(\frac{k_2(m+M)}{k_1 + k_2} - \frac{M}{2}\right).$$

Задача V.12 Две невесомые пружины с коэффициентом жесткости k_1 и k_2 соединяют один раз последовательно, другой раз параллельно (*рис. V.12*). Какой должна быть жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

Решение. При последовательном соединении пружин растягивающие их силы одинаковы и равны силе $\vec{F}$, с которой растягивают систему пружин (в нашей задаче $\vec{F} = m\vec{g}$).

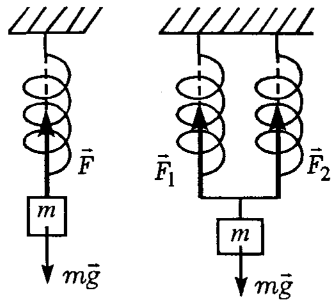

Рис. V.12

Общее удлинение системы равно сумме удлинений каждой пружины, т. е.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2. \qquad (1)$$

Поскольку по закону Гука $\Delta x = \dfrac{F}{k}$, то $\Delta x_1 = \dfrac{F}{k_1}$, $\Delta x_2 = \dfrac{F}{k_2}$. Подставляя соответствующие выражения для Δx в формулу (1), получим

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \text{ откуда } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

При параллельном соединении у обеих пружин одинаковые удлинения, т. е. $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$, а растягивающая их сила F должна равняться сумме двух сил натяжения пружин, т. е. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Вновь воспользовавшись законом Гука для каждой из пружин, получим

$$k\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x, \text{ или } k = k_1 + k_2.$$

Задача V.13 Однородная лестница опирается на абсолютно гладкие пол и стену (*рис. V.13*). Каким должно быть натяжение веревки $\vec{T}$, привязанной к середине лестницы, чтобы удержать ее от падения?

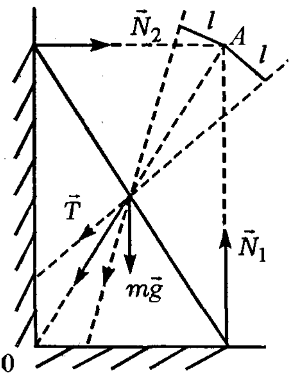

Рис. V.13

Решение. На лестницу действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и сила натяжения $\vec{T}$ (см. рис.). Если ось вращения провести через точку A, то задача очень упростится, поскольку три силы ($\vec{T}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$) будут проходить через ось и их моменты относительно этой оси равны нулю. Останется только один момент силы тяжести $m\vec{g}$, который ничем не компенсируется, поэтому лестница обязательно упадет, какой бы по величине ни была сила $\vec{T}$.

Эта задача наглядно показывает, как важно правильно выбрать ось вращения для того, чтобы облегчить решение задачи.

Если силу $\vec{T}$ направить не в точку 0, а правее линии $0A$, то лестница обязательно упадет, так как момент силы $\vec{T}$ будет направлен в ту же сторону, что и момент силы тяжести $m\vec{g}$. Если же силу $\vec{T}$ направить левее линии $0A$, то момент силы $\vec{T}$ направлен в сторону, противоположную моменту силы тяжести. В этом случае лестницу можно удержать от падения.

Задача V.14 Тяжелый однородный стержень массой M упирается одним концом в угол между стеной и полом под углом α к горизонту. К другому концу привязан канат под углом $\beta = 90°$ (*рис. V.14*). Определить силу натяжения каната и направление силы реакции опоры со стороны стенки и пола.

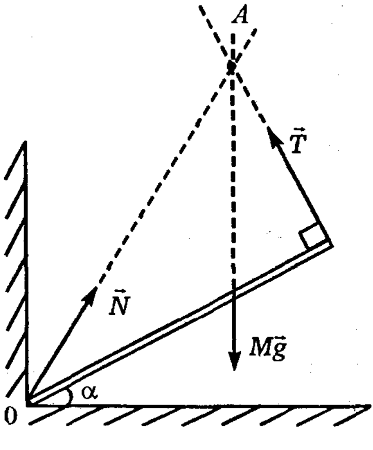

Рис. V.14

Решение. На стержень действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и реакция опоры со стороны стены и пола $\vec{N}$, приложенная к стержню в точке 0. Так как ни направление, ни величина силы $\vec{N}$ не известны, то за ось вращения удобно выбрать ось, проходящую через точку 0 и перпендикулярную плоскости чертежа. В этом случае условие равновесия для моментов сил запишется

$$Mg\frac{l}{2}\cos\alpha - lT = 0, \text{ или } T = \frac{Mg}{2}\cos\alpha.$$

С увеличением угла α натяжение нити уменьшается. Для определения направления силы реакции $\vec{N}$ вспомним важное положение: если момент сил относительно какой-нибудь оси равен нулю, то это справедливо и для любой другой оси. Поэтому выберем ось, проходящую через точку пересечения линии действия силы тяжести $M\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{T}$ (точка A на рисунке). Сила реакции опоры $\vec{N}$ обязательно должна проходить через эту точку, так как только в этом случае сумма моментов всех действующих сил будет равна нулю. (В этом случае плечи всех действующих сил обращаются в нуль.)

Задача V.15 К совершенно гладкой вертикальной стенке приставлена однородная лестница массой M, образующая с горизонтальной опорой угол α (*рис. V.15*). Определить силы, действующие на лестницу со стороны стенки и опоры. Построением определить направление силы, действующей на лестницу со стороны опоры.

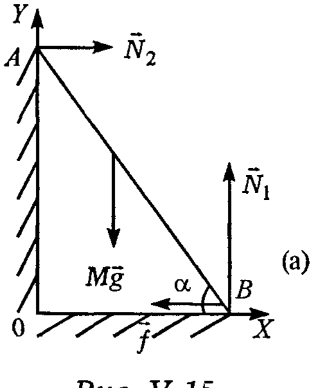

Рис. V.15

Решение. На лестницу действуют четыре силы: силы реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, сила тяжести $M\vec{g}$ и сила трения покоя $\vec{f}$ (она направлена в сторону, противоположную возможному движению). Первое условие равновесия для лестницы имеет вид

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g} + \vec{f} = 0 \cdot$$

В проекциях на оси $0X$ и $0Y$ это уравнение запишется соответственно

$$N_2 - f = 0, \text{ или } N_2 = f;$$

$$N_1 - Mg = 0, \text{ или } N_1 = Mg.$$

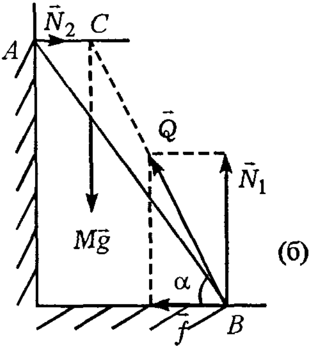

Рис. V.15

Второе условие равновесия для моментов сил удобно записать относительно оси, проходящей через точку B, т.е.

$$N_2 l \sin\alpha - Mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0, \text{ или } N_2 = \frac{Mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Со стороны опоры на лестницу действуют две силы: сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{f}$. Величину результирующей этих сил легко определить по теореме Пифагора

$$Q = \sqrt{f^2 + N_1^2} = \sqrt{\left(\frac{Mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 + (Mg)^2} = \frac{Mg}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Определим направление ее. Для этого ось вращения проведем через точку пересечения линий действия сил $\vec{N}_2$ и $M\vec{g}$ (*рис. V.15, б*) – точку C.

Для равновесия лестницы сумма моментов сил должна равняться нулю относительно любой выбранной оси. Ось, проходящая через точку C, удобна тем, что моменты сил $\vec{N}_2$ и $M\vec{g}$ относительно этой оси равны нулю, следовательно, и результирующая сила $\vec{Q}$ должна быть направлена так, чтобы ее продолжение пересекало точку C.

Задача V.16 Определить положение центра масс однородного диска радиусом R, из которого вырезано отверстие радиусом r (*рис. V.16*), причем центр выреза находится от центра диска на расстоянии $R/2$.

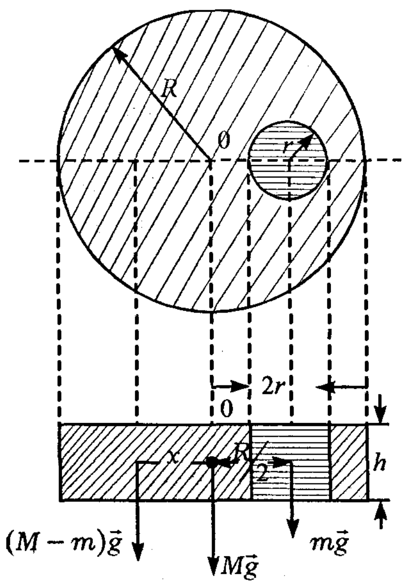

Рис. V.16

Решение. Силу тяжести сплошного диска можно представить как равнодействующую двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ маленькой части радиусом r и силы тяжести оставшейся части $(M-m)\vec{g}$, каждая из которых приложена в центре масс соответствующей фигуры. Поместив ось вращения в центре масс сплошного диска (в точке 0), запишем условие равновесия для моментов сил

$$(M-m)gx = mg\frac{R}{2}, \text{ или } x = \frac{mg\,R/2}{(M-m)g},$$

где $m = \rho h \pi r^2$, $M = \rho h \pi R^2$, ρ — плотность материала диска, h – его высота. Тогда

$$x = \frac{r^2 R \pi \rho h}{2\pi \rho h\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{r^2 R}{2\left(R^2 - r^2\right)}.$$

Замена вырезанных частей какой-либо фигуры точно такими же частями, но из материала фигуры позволяет легко решить серию аналогичных задач с вырезанными частями куба, шара, цилиндра и других фигур.

Задача V.17 Пять шариков, масса которых соответственно равна m, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$, расположены на столе вдоль одной прямой. Расстояние между двумя соседними шариками a. Определить центр тяжести системы (*рис. V.17*).

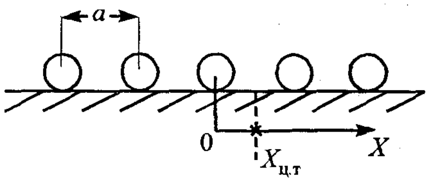

Рис. V.17

Решение. Выберем ось $0X$ вдоль прямой, по которой расположены шарики. Начало отсчета этой прямой можно выбрать где угодно, например связать с положением третьего шарика (см. рис.). Координата центра тяжести системы определяется формулой (см. пV.4)

$$X_{ц.т} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \text{ или}$$

$$X_{ц.т} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} =$$

$$= \frac{m(-2a) + 2m(-a) + 3m \cdot 0 + 4ma + 5m \cdot 2a}{15m} = \frac{10ma}{15m} = \frac{2}{3}a.$$

Таким образом, центр тяжести системы находится на расстоянии $x = {}^{2a}\!/_{3}$ справа от начала координат (от точки 0).

§ 2. Статика жидкостей и газов

Статика жидкостей и газов изучает условия равновесия жидкостей и газов.

пV.5 Давлением газа (жидкости) называется скалярная величина, измеряемая силой, действующей на единицу поверхности в направлении нормали, т. е. $p = {}^{F}\!/_{S}$.

пV.6 Закон Паскаля: на одном и том же уровне давление на маленькую площадку, помещенную в жидкость, не зависит от ориентации площадки.

пV.7 Давление зависит от глубины погружения в жидкость. Разность давлений Δp в двух точках внутри жидкости равно силе тяжести вертикального столба жидкости с площадью сечения, равной единице, и высотой, равной глубине погружения Δh, т. е.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g \Delta h.$$

Давление жидкости, обусловленное только ее