$$X_{ц.т} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} =$$

$$= \frac{m(-2a) + 2m(-a) + 3m \cdot 0 + 4ma + 5m \cdot 2a}{15m} = \frac{10ma}{15m} = \frac{2}{3}a.$$

Таким образом, центр тяжести системы находится на расстоянии $x = {}^{2a}\!/_{3}$ справа от начала координат (от точки 0).

§ 2. Статика жидкостей и газов

Статика жидкостей и газов изучает условия равновесия жидкостей и газов.

пV.5 Давлением газа (жидкости) называется скалярная величина, измеряемая силой, действующей на единицу поверхности в направлении нормали, т. е. $p = {}^{F}\!/_{S}$.

пV.6 Закон Паскаля: на одном и том же уровне давление на маленькую площадку, помещенную в жидкость, не зависит от ориентации площадки.

пV.7 Давление зависит от глубины погружения в жидкость. Разность давлений Δp в двух точках внутри жидкости равно силе тяжести вертикального столба жидкости с площадью сечения, равной единице, и высотой, равной глубине погружения Δh, т. е.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g \Delta h.$$

Давление жидкости, обусловленное только ее силой тяжести, называется гидростатическим ($p_{гидр}$).

Давление жидкости на некоторой глубине h, отсчитываемой от поверхности раздела воздух – жидкость, равно:

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + p_{гидр},$$

где p_0 – атмосферное давление. Давление в системе СИ измеряется в паскалях – Па:

$$1Па = \frac{1Н}{1м^2} = 1\,кг/мс^2.$$

В обыденной жизни давление измеряют в миллиметрах ртутного столба. В этом случае

$$p_{мм\ рт.ст.} = p_{0\ мм\ рт.ст.} + h_{мм\ рт.ст.}$$

1 мм рт.ст. = 131,58Па.

Часто давление измеряют в *технических атмосферах*. Техническая атмосфера – это давление, производимое силой в 1 кгс = 9,8Н на площадку в 1 см^2, т. е.

$$1\,ат = 1\,{}^{кгс}\!/_{см^2} = \frac{1\,кг \cdot 9{,}8\,{}^{м}\!/_{c^2}}{10^{-4}\,м^2} = 98070\,Па \approx 10^5\,Па.$$

пV.8 Закон Архимеда: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_A = \rho V g,$$

где ρ – плотность жидкости, V – ее объем.

пV.9 Итальянский физик Торричелли показал, что в стеклянной трубке, заполненной ртутью и опущенной в чашу со ртутью открытым концом, остается часть ртути высотой h=760 мм. Это означает, что давление этого столбика ртути уравновешивается атмосферным давлением p_0 у поверхности чаши, т. е.

$$p_0 = \rho_{рт} g h_{рт}.$$

Это давление измеряется либо в миллиметрах ртутного столба, тогда $p_0 = h$ мм рт.ст., либо в паскалях,

$$p_0 = \rho_{рт} g h_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 \cdot 0{,}76 \text{ м} =$$

$$= 10{,}3 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 10^5 \text{ Па}.$$

Это давление называется физической атмосферой. Если вместо чаши и трубки со ртутью взять чашу и трубку с водой, то столб воды в трубке, уравновешивающий атмосферное давление, должен быть равен

$$p_0 = \rho_{рт} h_{рт} g = \rho_в h_в g, \text{ или } h_в = \frac{\rho_{рт} h_{рт}}{\rho_в} = 10{,}33 \text{ м}.$$

Задача V.18 В двух цилиндрических сообщающихся сосудах налита ртуть. Сечение одного из сосудов вдвое больше другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На какую высоту h поднимается при этом уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии l от верхнего края широкого сосуда. Плотность ртути ρ, воды ρ_0 (*рис. V.18*).

Решение. За счет давления налитой в правый сосуд воды ртуть в этом сосуде опустится на высоту x, а в левом — поднимется на высоту h. При этом в силу несжимаемости жидкости вытеснен-

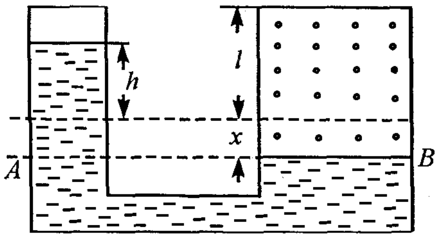

Рис. V.18

ные объемы будут одинаковыми, т. е. $S_1x = S_2h$, или $h = \dfrac{S_1x}{S_2}$, где S_1 и S_2 – площади поперечного сечения правого и левого сосудов соответственно.

Смещение x определяется из равенства давлений жидкостей в правом и левом колене на уровне AB

$\rho_0 g(l + x) = \rho g(x + h)$, или $\rho_0(l + x) = \rho(x + 2x)$, отсюда

$$x = \frac{\rho_0 l}{3\rho - \rho_0}.$$

Высота h, на которую поднимается ртуть в левом колене, равна:

$$h = 2x = \frac{2\rho l}{3\rho - \rho_0}.$$

Задача V.19 При подъеме груза массой M с помощью гидравлического пресса была затрачена работа A (только на перемещение малого поршня). При этом малый поршень сделал n ходов, перемещаясь за один ход на расстояние h. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого?

Решение. Гидравлический пресс представляет собой два сообщающихся сосуда различного диаметра, заполненных жидкостью и закрытых поршнями. Если к малому поршню площадью S_1 приложить силу F_1, то для сохранения равновесия к большому поршню площадью S_2 необходимо приложить силу F_2, при этом должно выполняться соотношение

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \qquad (1)$$

Если первый поршень переместить на расстояние Δx_1, часть жидкости переместится из первого сосуда во второй и поднимет второй поршень на высоту Δx_2. В силу несжимаемости жидкости объем жидкости, вытесняемый поршнем из одного сосуда, равен объему, поступающему во второй, т.е.

$$\Delta x_1 S_1 = \Delta x_2 S_2. \qquad (2)$$

Используя уравнения (1) и (2), получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \qquad (3)$$

Таким образом, прикладывая малую силу к малому поршню, можно на большом поршне поднимать большие грузы.

В предложенной задаче малый поршень совершает работу A и перемещается за n ходов на расстояние $\Delta x_1 = nh$, чтобы поднять на большом поршне груз M. Для того чтобы ответить на вопрос задачи и определить S_2/S_1, нужно воспользоваться соотношением (3)

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1},$$

где $F_2 = Mg$, а F_1 можно определить из работы, совершенной малым поршнем:

$$A = F_1 \Delta x_1 = F_1 nh, \text{ т. е. } F_1 = \frac{A}{nh}.$$

Таким образом, $$\frac{S_2}{S_1} = \frac{Mg}{A/nh} = \frac{Mgnh}{A}.$$

Задача V.20 До какой высоты h нужно налить однородную жидкость в цилиндрический сосуд радиусом R, чтобы сила, с которой жидкость будет давить на боковую поверхность, была равна силе давления на дно сосуда?

Решение. Гидростатическое давление, обусловленное давлением только столба жидкости, изменяется с высотой от 0 до ρgh. Поэтому на отдельные участки боковой поверхности в зависимости от высоты сила давления будет разная. При расчете силы давления на боковую поверхность обычно берут среднее значение давления $p_{\text{ср}} = \dfrac{\rho gh}{2}$ и умножают на площадь боковой поверхности.

Таким образом, сила давления на боковую цилиндрическую поверхность $S_{бок}$ равна

$$F_{бок} = p_{ср} S_{бок} = \frac{\rho g h}{2} 2\pi R h = \rho g \pi R h^2.$$

На дно сосуда

$$F_д = \pi R^2 \rho g h.$$

Из равенства этих сил следует

$\rho g \pi R h^2 = \pi R^2 \rho g h$, или $h=R$.

Таким образом, при высоте сосуда h, равной радиусу дна сосуда, сила давления на дно и поверхность цилиндрического сосуда будут одинаковыми.

Задача V.21 Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду так, что в воде находится половина ее. Определить силу, действующую на палочку со стороны шарнира, и плотность материала ρ, из которого сделана палочка (*рис. V.19*).

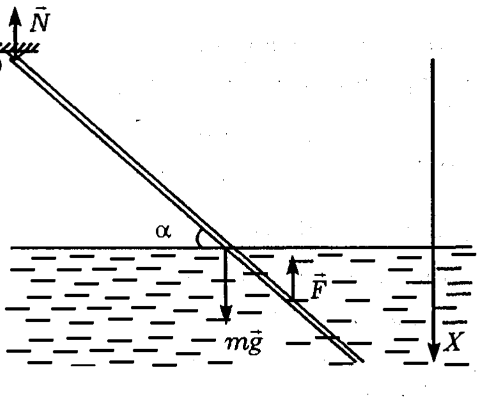

Рис. V.19

Решение. На палочку действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда $\vec{F}$ и сила реакции со стороны шарнира $\vec{N}$. Направление силы $\vec{N}$ легко получить из первого условия равновесия палочки (пV.3)

$$\sum \vec{F}_i = 0, \text{ или } m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = 0, \text{ или } \vec{N} = -\left(m\vec{g} + \vec{F}\right).$$

В проекции на ось $0X$ это соотношение запишется

$$N = -\left(mg - F\right). \qquad (1)$$

Второе условие равновесия удобно записать для моментов сил, выбрав ось вращения, проходящую через точку 0:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F\,{}^{3}\!/_{4}\,l\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Это соотношение позволяет вычислить и выталкивающую силу

$$F = {}^{2}\!/_{3}\,mg.$$

Подставив это соотношение в формулу (1), можно определить величину и направление силы $\vec{N}$, действующей на палочку со стороны шарнира,

$$N = -\left(mg - {}^{2}\!/_{3}\,mg\right) = -\frac{mg}{3}.$$

Таким образом, сила, действующая со стороны шарнира, направлена вертикально вверх.

Плотность материала ρ легко определить из выражения для силы F, воспользовавшись законом Архимеда (пV.8)

$$F = {}^{2}\!/_{3}\,mg = {}^{2}\!/_{3}\,\rho V_{п} g = \rho_0 \frac{V_{п}}{2} g,$$

отсюда $\rho = \frac{4}{3}\rho_0$, где ρ_0 – плотность воды, $V_п$ – объем всей палочки.

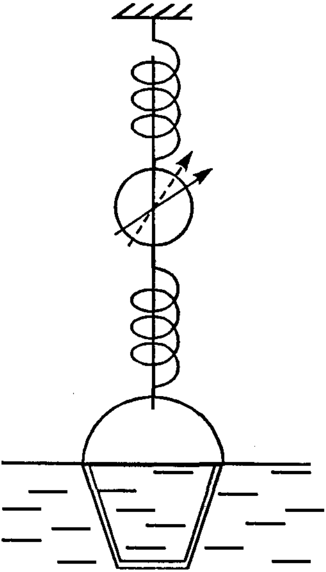

Рис. V.20

Задача V.22 На крюке динамометра висит ведерко. Изменится ли показание динамометра, если ведерко наполнить водой и погрузить в воду?

Решение. Показание динамометра уменьшится, так как воды, вытесненной ведерком, больше, чем налитой в него (*рис. V.20*). Показание динамометра изменится на величину веса воды, вытесняемой стенками и дном сосуда.

Задача V.23 Алюминиевый и железный сплошные шары уравновешены на рычажных весах. Нарушится ли равновесие, если шары погрузить в воду? Рассмотреть два случая:

1) шары одинаковой массы (*рис. V.21, а*),

2) шары одинакового объема (*рис. V.21, б*).

Решение.

1) Рассмотрим первый случай. Если шары имеют одинаковую массу, то они уравновешены на равноплечих весах. Однако объемы у них разные, причем $V_{Al} > V_{Fe}$. Это значит, что при погруже-

нии шаров в воду выталкивающая сила Архимеда F_1, действующая на алюминиевый шар, больше выталкивающей силы F_2, действующей на железный шар. Момент силы F_1 больше момента силы F_2 относительно оси вращения, проведенной через точку 0. Поэтому равновесие шаров в воде нарушится: железный шар опустится вниз.

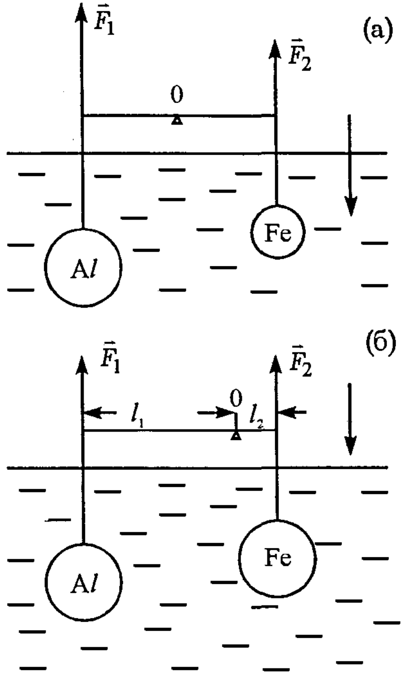

Рис. V.21

2) Если шары одинакового объема, то они должны быть уравновешены на неравноплечих весах, так как массы у них разные, причем масса железа больше массы алюминия. При погружении обоих шаров в воду на них действуют одинаковые выталкивающие силы $(F_1 = F_2)$. Однако момент силы F_1 больше момента силы F_2 относительно оси, проведенной через точку 0. Поэтому равновесие шаров нарушится и опять железный шар опустится вниз.

Следует отметить, что в решении не рассматривались моменты сил тяжести обоих шаров, так как шары были уравновешены в воздухе, а это значит, что сумма моментов сил тяжести обоих шаров всегда равна нулю.

Задача V.24 Деревянная коробочка с грузом плавает на поверхности воды, налитой в сосуд. Как изменится уровень жидкости, если груз из коробочки переложить на дно сосуда? Плотность груза больше плотности воды (*рис. V.22*).

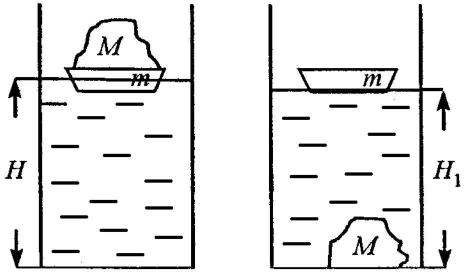

Рис. V.22

Решение. Когда коробочка с грузом плавает, то их сила тяжести уравновешена силой Архимеда, т.е.

$$(m + M)g = \rho_0 g V_1,$$

где M и m – массы груза и коробочки соответственно, V_1 – вытесненный объем воды, ρ_0 – плотность воды. Это соотношение позволяет вычислить первоначальный объем вытесненной воды

$$V_1 = \frac{(m + M)}{\rho_0} = \frac{m}{\rho_0} + \frac{M}{\rho_0}. \qquad (1)$$

Во втором случае плавает одна коробочка, поэтому выполняется соотношение

$mg = \rho_0 g V_2'$, где V_2' — объем, вытесненный только одной плавающей коробочкой. Кроме того, погруженный в жидкость груз вытесняет объем

$V_2'' = \dfrac{M}{\rho_2}$, где ρ_2 – плотность груза. Таким образом, общий вытесненный объем жидкости при погружении груза на дно сосуда равен

$$V_2 = V_2' + V_2'' = \frac{m}{\rho_0} + \frac{M}{\rho_2}. \qquad (2)$$

Сравнив правые части выражений для вытесненных объемов (1) и (2), заметим, что $V_2 < V_1$, так как $\rho_2 > \rho_0$.

Поскольку площадь поперечного сечения сосуда остается в обоих случаях неизменной, то уровень жидкости в сосуде понизится, т. е. $H_1 < H$.

Задача V.25 Резиновый мяч массой m и радиусом R погружают под воду на глубину h и отпускают. На какую высоту H от поверхности воды подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать (*рис. V.23*).

Решение. На мяч действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}$. Изменение механической энергии мяча происходит за счет работы силы Архимеда, т. е. $\Delta E_{мех} = A_F = Fh$.

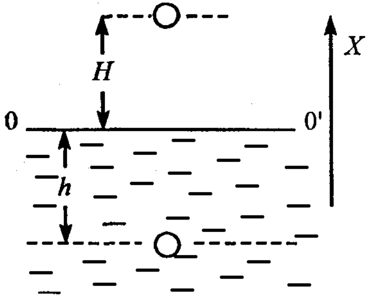

Рис. V.23

В нашей задаче

$\Delta E_{кин} = 0$

Если за начало отсчета потенциальной

энергии выбрать поверхность воды, то это соотношение будет иметь вид

$$E_{\text{пк}} - E_{\text{пн}} = Fh\text{, или } mgH - (-mgh) = \rho_0 Vgh\text{,}$$

отсюда $H = \left(\dfrac{\rho_0 V}{m} - 1\right)h = \left(\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{m} - 1\right)h$.

Задача V.26 Сосуд, имеющий форму усеченного конуса, показанный на *рис. V.24*, опущен в воду. Если в сосуд налить m=200 г воды, то дно сосуда оторвется. Отпадет ли дно, если в него налить 200 г масла, 200 г ртути, поставить на дно гирю массой 200 г?

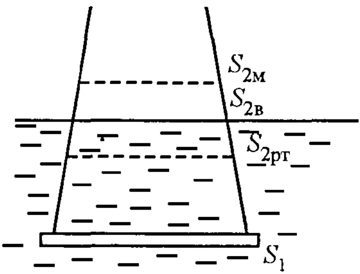

Рис. V.24

Решение. Обозначим нижнее и верхнее сечение налитой в сосуд жидкости через S_1 и S_2 соответственно. Тогда сила давления налитой в сосуд жидкости на его дно определится

$$F = \rho g h S_1 = \frac{m}{V} g h S_1 = \frac{mghS_1}{\frac{\pi h}{3}\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)} =$$

$$= \frac{3mgS_1}{\pi\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)}\text{,}$$

где V – объем налитой в сосуд жидкости, а h – высота уровня жидкости в сосуде.

Объем жидкости V вычисляется по формуле усеченного конуса:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы нижнего и верхнего основания соответственно.

Для того чтобы определить, отпадет ли дно сосуда, достаточно сравнить радиусы верхних оснований R_2 различных налитых жидкостей с радиусом R_2 для воды, поскольку нижнее основание во всех случаях одинаково.

Таким образом, при заполнении сосуда маслом $R_{2м} < R_{2в}$ и $F_м > F_в$, поэтому дно сосуда оторвется, при заполнении ртутью $R_{2р} > R_{2в}$ ($F_р < F_в$) и дно сосуда не оторвется. При помещении гири на дно сосуда $F_г = mg < F_в$ и дно сосуда не оторвется.

VI. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

пVI.1 Моль – количество вещества, содержащего столько же молекул, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода, тогда число молей в веществе

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро, равное $6{,}02 \cdot 10^{23}$(моль)$^{-1}$,