Объем жидкости V вычисляется по формуле усеченного конуса:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы нижнего и верхнего основания соответственно.

Для того чтобы определить, отпадет ли дно сосуда, достаточно сравнить радиусы верхних оснований R_2 различных налитых жидкостей с радиусом R_2 для воды, поскольку нижнее основание во всех случаях одинаково.

Таким образом, при заполнении сосуда маслом $R_{2м} < R_{2в}$ и $F_м > F_в$, поэтому дно сосуда оторвется, при заполнении ртутью $R_{2р} > R_{2в}$ ($F_р < F_в$) и дно сосуда не оторвется. При помещении гири на дно сосуда $F_г = mg < F_в$ и дно сосуда не оторвется.

VI. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА

пVI.1 Моль – количество вещества, содержащего столько же молекул, сколько содержится атомов в 0,012 кг углерода, тогда число молей в веществе

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро, равное $6{,}02\ .10^{23}$(моль)$^{-1}$, т. е. число частиц, содержащихся в одном моле вещества.

пVI.2 Масса любого вещества $m = \nu\mu$, где μ – масса одного моля.

пVI.3 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{1}{3} nmv^2 = nkT,$$

где n – концентрация, k – постоянная Больцмана, T – температура по шкале Кельвина.

пVI.4 Связь среднекинетической энергии молекул с температурой

$$E = \frac{3}{2} kT.$$

пVI.5 Состояние газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением p, объемом V и температурой T (по шкале Кельвина). Связь между шкалой Кельвина и Цельсия

$$T = 273 + t^\circ \text{ C}.$$

пVI.6 Все три параметра связаны основным уравнением состояния идеального газа (объединенный газовый закон)

$$pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная, равная $R = kN_A$.

Для изотермического процесса (T = const) это уравнение имеет вид

$pV = \text{const}$ – закон Бойля – Мариотта.

Для изобарного процесса ($p = const$)

$\frac{V}{T} = \text{const}$, или $V(t) = V_0(1 + \alpha t)$ – закон Гей-

Люссака, где V_0 — объем при $t = 0^\circ$ С, $\alpha = \dfrac{1}{273^\circ \text{ C}}$.

Для изохорного процесса ($V = const$)

$$\frac{p}{T} = \text{const}, \text{ или } p(t) = p_0(1 + \beta t)$$ — закон Шарля, где p_0 — давление газа при $t_0 = 0^\circ$ С и

$$\beta = \alpha = \frac{1}{273^\circ \text{ C}}.$$

пVI.7 «Нормальное состояние» газа определяется величинами p_0, V_0, где p_0 — давление, равное давлению

$$760 \text{ мм рт. ст.} = 101325 \text{ Н/м}^2 = 10^5 \text{ Па}, \text{ при}$$

$T_0 = 273 \text{ K}$ (0° C), V_0 — объем при той же температуре.

Для количества вещества, равного 1 молю, при нормальных условиях любой газ занимает объем

$V_{0\mu} = 0{,}0224 \text{ м}^3/\text{моль}$. Поэтому $\dfrac{p_0 V_{0\mu}}{T_0} = R$ — одинакова для всех газов и называется универсальной газовой постоянной $R = 8{,}31$ Дж/(моль . К).

пVI.8 Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, т. е. таких давлений, которые оказывал бы каждый газ, входящий в состав смеси, если бы он был один в этом сосуде:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

пVI.9 Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

$$U = \nu N_A \, {}^3\!/_2\, kT = \frac{m}{\mu}\, {}^3\!/_2\, RT = {}^3\!/_2 \frac{m}{\mu} RT.$$

Если газ не одноатомный, то его внутренняя энергия $U = c\dfrac{m}{\mu}RT$, где коэффициент с зависит от количества атомов в газе.

пVI.10 Если внутри системы, изолированной от окружающих тел, не совершается механическая работа, то для нее справедливо уравнение теплового баланса: сумма количеств теплот ΔQ_i, полученных и отданных телами системы, равна нулю

$$\sum \Delta Q_i = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n = 0, \text{ или}$$

$$\sum c_1 m_1 \Delta T_1 + c_2 m_2 \Delta T_2 + \ldots + c_n m_n \Delta T_n = 0.$$

пVI.11 Первое начало термодинамики: количество теплоты, передаваемое телу, ΔQ идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение телом работы ΔA, т. е.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \text{ или } cm\Delta T = \gamma \Delta T + p\Delta V,$$

где с – удельная теплоемкость, а γ – коэффициент пропорциональности.

пVI.12 В любом газовом процессе работу, совершаемую газом, можно определить из графика зависимости давления от объема. Площадь под кривой зависимости давления от объема численно равна работе, совершенной газом (*рис. VI.1*).

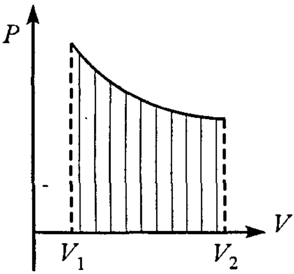


Рис. VI.1

пVI.13 Коэффициент полезного действия теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — тепло, получаемое от нагревателя, Q_2 — тепло, переданное холодильнику.

пVI.14 Количество теплоты, необходимое для испарения жидкости при постоянной температуре, $Q = rm$, где r — удельная теплота парообразования.

пVI.15 Количество тепла, необходимое для плавления тела массой m при постоянной температуре, $Q = \lambda m$, где λ — удельная теплота плавления.

пVI.16 Относительная влажность

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_н} 100\,\% = \frac{p}{p_н} 100\,\%,$$

где ρ и p – плотность и давление ненасыщенного пара, $\rho_н$ и $p_н$ — плотность и давление насыщенного пара при той же температуре.

Задача VI.1 Вычислить число N молекул, содержащихся в объеме $V = 1$ см^3 газа при нормальных условиях.

Решение. При нормальных условиях 1 моль газа занимает объем $V_{0\mu} = 0{,}0224\,\text{м}^3/\text{моль}$ (пVI.7). Таким образом, в обьеме V содержится количество молей $\nu = \dfrac{V}{V_{0\mu}}$. Поскольку в 1 моле вещества содержится N_A число молекул, то общее число молекул в объеме V равно

$$N = \nu N_A = \frac{V}{V_{0\mu}} N_A = \frac{10^{-6}\ \text{м}^3 \cdot 6{,}1 \cdot 10^{23}\ 1/\text{моль}}{0{,}0224\ \text{м}^3/\text{моль}} = 2{,}7 \cdot 10^{19}.$$

Задача VI.2 Число молекул, содержащихся в единице объема идеального газа при нормальных условиях, равно $n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}$. Этот же газ при температуре $t = 91^\circ$ С и давлении $p = 800$ кПа имеет плотность $\rho = 5{,}4\,\text{кг}/\text{м}^3$. Определить массу одной молекулы этого газа.

Решение. В процессе нагревания газа его количество молей не меняется. Это значит, что выполняется соотношение

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}. \qquad (1)$$

Начальный объем газа V_0 легко определить из заданной концентрации

$n_0 = \dfrac{N}{V_0}$, или $V_0 = \dfrac{N}{n_0}$, где N – общее число частиц в газе. Конечный объем V легко определить из заданной плотности

$$\rho = \frac{m}{V}, \text{ или } V = \frac{m}{\rho}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (1), получим

$$\frac{p_0 \, {}^{N}\!/_{n_0}}{T_0} = \frac{p \, {}^{m}\!/_{\rho}}{T}.$$

Отсюда легко найти массу одной молекулы неизвестного газа

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{p_0 T \rho}{T_0 n_0 p} = \frac{10^5 \text{ Па}(273+91)\text{ К}\cdot 5{,}4 \text{ кг/ м}^3}{273 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \cdot 800 \text{ кПа}} = 3{,}3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Задача VI.3 Сосуд объемом $V = 10\text{м}^3$, содержащий воздух при нормальных условиях, находится в космосе, где давление можно полагать равным нулю. В сосуде пробито отверстие. Через какое время t в сосуде давление станет равным нулю, если считать, что через отверстие каждую секунду вылетает $n_0 = 10^8$ молекул?

Решение. Время, через которое вылетят все молекулы, находящиеся в сосуде, определяется $t = \frac{N}{n_0}$, где N – число молекул в сосуде до пробивания отверстия. Таким образом, задача сводится к определению числа молекул, находящихся в сосуде объемом V при нормальных условиях.

При одних и тех же условиях (p_0, T_0) число молекул в сосуде пропорционально его объему, т. е.

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_{0\mu}},$$

где N_A – число частиц в 1 моле, а $V_{0\mu}$ – объем 1 моля. Тогда

$$N = \frac{N_A V}{V_{0\mu}}.$$

Время, через которое все молекулы вылетят из сосуда

$$t = \frac{N_A V}{n_0 V_{0\mu}} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ 1/\text{моль} \cdot 10\ \text{см}^3}{10^8\ 1/\text{с} \cdot 22{,}4 \cdot 10^3\ \text{см}^3/\text{моль}} = 2{,}7 \cdot 10^{12}\,\text{с} = 85000\ \text{лет}.$$

Задача VI.4 На стенку площадью S налетает поток молекул со средней скоростью v. Число молекул в единице объема n_0, масса каждой молекулы m. Определить силу, действующую на стенку, и давление, если молекулы движутся перпендикулярно к стенке и удары их о стенку абсолютно упруги.

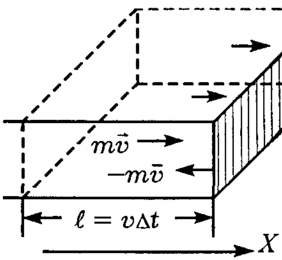


Рис. VI.2

Решение. При упругом ударе о стенку каждая молекула меняет свою скорость на обратную за счет силы упругости стенки. При одном ударе молекулы, который длится очень малое время δt, на вертикальную стенку со стороны одной молекулы действует импульс силы $f\delta t$ (*рис. VI.2*). По третьему закону Ньютона он равен импульсу силы упругости со стороны стенки, но с обратным знаком, т. е.

$$f\delta t = -[-mv - mv] = 2mv.$$

За конечное время $\Delta t >> \delta t$ до стенки долетят те молекулы, которые были от нее на расстоянии $l = v\Delta t$. Поэтому за время Δt о стенку ударится число молекул

$$N = n_0 V_{\Delta t} = n_0 S v \Delta t.$$

Импульс силы этих ударившихся молекул равен

$$F\Delta t = Nf\delta t = N2mv = 2n_0 m S v^2 \Delta t.$$

Следовательно, молекулы действуют на стенку с силой

$$F = 2n_0 m v^2 S.$$

Давление на стенку равно

$$p = \frac{F}{S} = 2n_0 m v^2.$$

Задача VI.5 Как располагаются изотермы газа на графике зависимости давления от объема для случаев расширения одной и той же массы газа при низкой и высокой температурах?

Решение. На графике зависимости давления от объема нарисуем две изотермы. Проведем некоторую прямую, соответствующую изохорическому процессу (V = const). Она пересечет две изотермы в точках 1 и 2 (*рис. VI.3*). Для этих точек запишем объединенный газовый закон:

$$\frac{p_1 V}{T_1} = \frac{p_2 V}{T_2} = \text{const}.$$

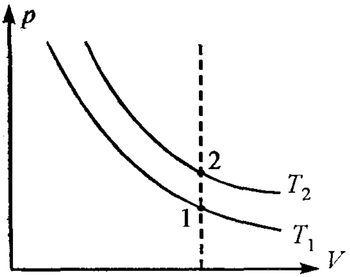


Рис. VI.3

Из формулы видно, что температура больше там, где больше давление, т. е. изотерма, соответствующая температуре T_2, лежит выше изотермы, соответствующей температуре T_1. Другими словами, изотерма, соответствующая более низкой температуре на графике p-V, располагается ближе к началу координат.

Задача VI.6 В результате некоторого процесса был получен график зависимости давления от объема, изображенный на *рис. VI.4*. Определить по этому графику характер изменения температуры газа.

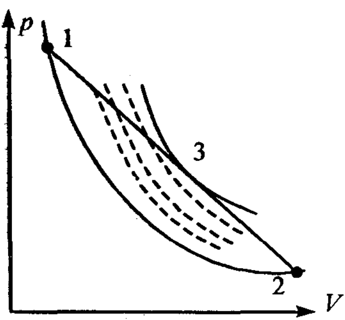


Рис. VI.4

Решение. Для определения характера изменения температуры газа следует провести на чертеже несколько изотерм, проходящих через начальную — 1, конечную — 2 и некоторую точку 3, в которой изотерма касается прямой 1-2. Тогда при движении от точки 1 до точки 3 температура газа будет повышаться (мы идем от более низкой изотермы к более высокой), а при движении от точки 3 до точки 2 температура газа понижается (см. задачу VI.5).

Задача VI.7 В результате некоторого процесса был получен график зависимости давления от температуры газа, изображенный на *рис. VI.5*. В каком из положений (1 или 2) объем газа был больше?

Решение. Проведем на рисунке две изохоры, проходящие через точки 1 и 2 (пунктирные линии). Воспользуемся объединенным газовым законом для определения объема:

$$V = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{p}.$$

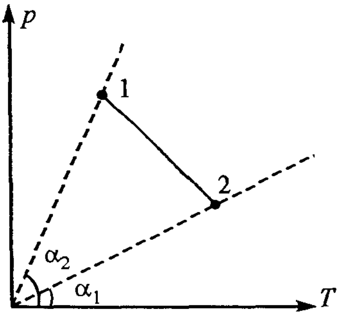


Рис. VI.5

Так как масса газа не меняется, то обозначим $\frac{m}{\mu} R = A$ — это некоторая константа. Тогда

$$V = A\frac{T}{p} = A\operatorname{ctg}\alpha.$$

Эта формула сразу же позволяет определить, в каком из состояний газа (1 или 2) объем больше. Там, где изохора наклонена к оси $0T$ под меньшим углом, там объем будет больше. Таким образом, в состоянии 1 объем газа V меньше, чем в состоянии 2 ($\operatorname{ctg}\alpha_1 < \operatorname{ctg}\alpha_2$). В результате процесса 1–2 газ расширяется.

Задача VI.8 В узкой цилиндрической трубке, запаянной с одного конца, находится воздух, отделенный от наружного пространства столбиком ртути длиной $h = 15$ см. Когда трубка лежит горизонтально, воздух занимает в ней объем $V_1 = 240$ мм^3; когда трубка устанавливается вертикально, открытым концом вверх, воздух занимает объем $V_2 = 200$ мм^3. Определить атмосферное давление p_0 (*рис. VI.6*).

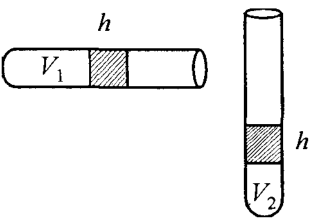


Рис. VI.6

Решение. Переворачивание трубки происходит при неизменной температуре, поэтому процесс – изотермический. Для него выполняется соотношение

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Так как в горизонтальной трубке столбик ртути находится в равновесии, то давление воздуха в объеме V_1 равно атмосферному, т. е. $p_1 = p_0$. В вертикально расположенной трубке давление воздуха в объеме V_2 равно давлению столбика ртути плюс атмосферное давление, т. е.

$$p_2 = \rho gh + p_0. \qquad (1)$$

Подставим значение p_1 и p_2 в уравнение Бойля – Мариотта

$$p_0V_1 = (\rho gh + p_0)V_2, \text{ отсюда } p_0 = \frac{\rho ghV_2}{V_1 - V_2}.$$

Подставляя в эту формулу цифры, мы получим

$$p_0 = \frac{13{,}6\,\text{г/см}^3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}15\,\text{м} \cdot 200\,\text{мм}^3}{(240-200)\,\text{мм}^3} \approx 1{,}02 \cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Если давление измерять в миллиметрах ртутного столба, то выражение для давления p_2 по формуле (1) следует записать $p_2 = h + p_0$. Тогда атмосферное давление p_0 будет измеряться в миллиметрах ртутного столба

$$p_0 = \frac{hV_2}{V_1 - V_2} = \frac{15\,\text{см} \cdot 200\,\text{мм}^3}{(240-200)\,\text{мм}^3} = 15\,\text{см} \cdot 5 = 75\,\text{см} =$$

$= 750$ мм рт. ст.

Задача VI.9 Закрытый с обеих сторон цилиндр разделен на две равные части теплонепроницаемым поршнем. В обеих частях цилиндра находятся одинаковые массы газа при $t_0 = 27°$ С и давлении $p_0 = 760$ мм рт. ст. Длина цилиндра $L = 40$ см. На какое расстояние Δx от середины цилиндра сместится поршень, если газ в одной из частей нагреть до температуры $t = 57°$ С? Какое давление p установится при этом в каждой из частей цилиндра (*рис. VI.7*)?

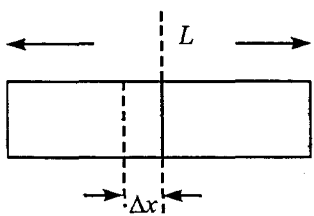


Рис. VI.7

Решение. Так как массы газа не меняются и давление после передвижения поршня остается одинаковым, объединенный газовый закон запишется

$$\frac{\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right)}{T_0}=\frac{\left(\frac{L}{2}+\Delta x\right)}{T},\text{ отсюда}$$

$$\Delta x=\frac{T-T_0}{T+T_0}\frac{L}{2}=\frac{30\,\text{К}\cdot 20\,\text{см}}{630\,\text{К}}=0{,}95\,\text{см}.$$

Для определения установившегося давления можно применить объединенный газовый закон для одной из частей объема. Легче записать для той части, в которой температура не менялась. В этой части сосуда процесс изотермический, т. е.

$$p_0\frac{L}{2}S=p\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right)S,\text{ отсюда}$$

$$p=\frac{Lp_0}{2\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right)}=798\text{ мм рт. ст.}$$

Задача VI.10 Два сосуда, наполненные воздухом под давлением $p_1=8\cdot 10^5$ Па и $p_2=6\cdot 10^5$ Па, имеют объемы $V_1=3$ л и $V_2=5$ л соответственно. Сосуды соединяют трубкой пренебрежимо малого объема. Определить установившееся давление в сосудах, если температура воздуха в них была одинакова и после установления равновесия не изменилась.

Решение. Процесс, происходящий в сосудах — изотермический. После соединения сосудов находящийся в каждом из них воздух займет объем (V_1+V_2). Для обоих сосудов выполняется закон Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = p_1'(V_1 + V_2); \quad p_2V_2 = p_2'(V_1 + V_2),$$

где p_1' и p_2' – парциальные давления воздуха после объединения.

Установившееся в сосудах давление по закону Дальтона равно сумме парциальных давлений, т. е. $p = p_1' + p_2'$. Сложив два вышеприведенных равенства, получим

$$p_1V_1 + p_2V_2 = (V_1 + V_2)(p_1' + p_2') = (V_1 + V_2)p,$$

откуда

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{8 \cdot 10^5\ \text{Па} \cdot 3\ \text{л} + 6 \cdot 10^5 \cdot 5\ \text{л}}{8} =$$

$= 6{,}75.10^5$Па.

Задача VI.11 Полагая, что воздух состоит из смеси трех газов: азота массой m_1 и молярной массой μ_1, кислорода массой m_2 и молярной массой μ_2 и аргона массой m_3 и молярной массой μ_3, определить молярную массу μ воздуха.

Решение. Для каждого газа можно записать уравнение состояния

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT; \quad p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT; \quad p_3V = \frac{m_3}{\mu_3}RT.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}\right)RT. \qquad (1)$$

С другой стороны, для смеси газов можно записать

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$, а u – искомая молярная масса смеси.

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 + p_3$. Таким образом, для смеси газа

$$(p_1 + p_2 + p_3)V = \frac{m}{\mu} RT. \qquad (2)$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), получим

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3},$$

следовательно,

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3}}.$$

Задача VI.12 Газ массой m с молярной массой μ нагревается на $\Delta T = 1\text{K}$ в цилиндре, закрытом поршнем массой M и площадью S. Во время нагревания газ совершает работу по поднятию поршня. Выразить эту работу:

а) через давление p и изменение объема ΔV газа,

б) через универсальную газовую постоянную R.

Давлением наружного воздуха пренебречь (*рис. VI.8*).

Решение. Газ нагревается при изобарическом процессе, поскольку $p = \dfrac{Mg}{S} = \text{const}$. Расширяясь, он совершает работу

$$A = Mgh = pSh = p\Delta V = p\left(V - V_0\right).$$

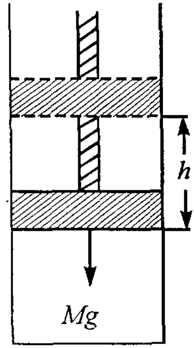


Рис. VI.8

Воспользовавшись объединенным газовым законом, можно записать до нагревания $pV_0 = \dfrac{m}{\mu}RT_0$; после нагревания на ΔT $pV = \dfrac{m}{\mu}R\left(T_0 + \Delta T\right)$.

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p\left(V - V_0\right) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Левая часть этого уравнения есть не что иное, как работа, совершаемая газом при расширении.

Таким образом, при изобарическом процессе газ совершает работу

$$A = p\left(V - V_0\right) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Это соотношение позволяет определить физический смысл универсальной газовой постоянной R: это работа, которую совершает 1 моль газа при изобарическом нагревании на 1К.

Задача VI.13 Некоторая масса газа, занимающая вначале объем V_0 при давлении p_0 и температуре T_0, расширяется один раз изобарно, другой раз изотермически до объема V (*рис. VI.9*). В каком из этих случаев газ совершает бо́льшую работу?

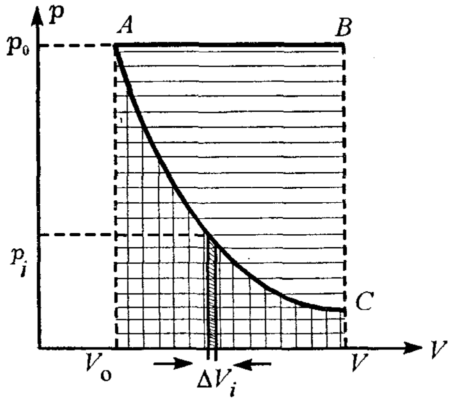


Рис. VI.9

Решение. Изобразим эти два процесса на графике зависимости давления от объема (pV). Работа при изобарическом процессе определяется

$$A_1 = p_0 \Delta V = p_0 (V - V_0).$$

Численно эта работа равна площади заштрихованного прямоугольника $V_0 ABV$. В случае изотермического процесса давление не остается постоянным. Но можно интервал $V_0 - V$ разбить на столь малые отрезки ΔV_i, в пределах которых давление можно считать постоянным. И тогда элементарная работа на этом интервале равна

$A_i = p_i \Delta V_i$, а полная работа при расширении объема V_0 до V равна $A = \sum A_i$. При стремлении интервалов ΔV_i к нулю эта работа численно будет равна площади фигуры, находящейся под изотермой AC (площади V_0ACV). Из рисунка видно, что при изобарическом процессе газ совершает бóльшую работу.

Этот абзац для тех, кто хочет узнать чуть больше

Работу при изотермическом процессе тоже можно посчитать. Ведь предел, к которому стремится полная работа при стремлении ΔV_i к нулю, не что иное, как

$$A = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum A_i = \int_{V_0}^{V} A_i = \int_{V_0}^{V} p_i dV = \int_{V_0}^{V} \frac{BdV}{V} = B\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = B \ln \frac{V}{V_0},$$

где значение B определяется из объединенного газового закона. Действительно,

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } p = \frac{B}{V},$$

т. е. $B = \frac{m}{\mu} RT$. Таким образом, $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V}{V_0}$.

Задача VI.14 В цилиндре под поршнем находится воздух. Поршень имеет форму, указанную на *рис. VI.10*. Масса поршня m. Площадь сечения цилиндра S_0. Атмосферное давление p_0. Какой груз массой M надо положить на поршень, чтобы объем воздуха V в цилиндре уменьшился в $n = 2$ раза? Температура постоянна, трение не учитывать.

Решение. Вспомним, что давление определяется как сила, действующая на единичную площадку в направлении нормали к поверхности. Поэтому со стороны газа на поршень действуют сила $\vec{F}_1$, направленная перпендикулярно поверхности S_1, т. е. $|\vec{F}_1| = pS_1$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила давления со стороны воздуха $\vec{F}_2$ (*рис. VI.10*).

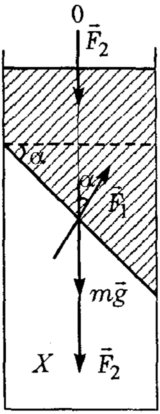


Рис. VI.10

Поршень находится в равновесии, если $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Запишем закон Ньютона в проекции на вертикальное направление оси $0X$:

$$mg - F_1 \cos\alpha + F_2 = 0\text{, или}$$

$$mg - p_1 S_1 \cos\alpha + p_0 S_0 = 0\text{, или}$$

$$mg - p_1 S_0 + p_0 S_0 = 0.$$

Это соотношение позволяет вычислить давление газа p_1, находящегося под поршнем:

$$p_1 = \frac{mg + p_0 S_0}{S_0} = \frac{mg}{S_0} + p_0.$$

Процесс происходит при постоянной температуре (изотермический), поэтому, чтобы объем воздуха уменьшился в 2 раза, давление p_1 в цилиндре нужно увеличить в 2 раза ($pV = \text{const}$). Это можно сделать за счет добавочного груза M, т. е.

$$2\left(\frac{mg}{S_0}+p_0\right)=\frac{(m+M)}{S_0}g+p_0,$$

отсюда $M=\left(\frac{mg}{S_0}+p_0\right)\frac{S_0}{g}=m+\frac{p_0S_0}{g}.$

Задача VI.15 На *рис. VI.11, а* изображен график изменения состояния идеального газа в координатах V-T. Изобразить этот график в координатах p-V и p-T.

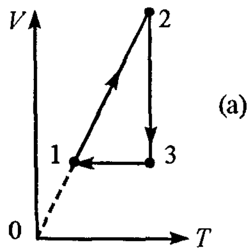


Рис. VI.11

Решение. Процесс 1–2 является изобарическим

$$\frac{V}{T}=\text{const}\ \ (\text{пVI.6}).$$

На *рис. VI.11, б* он изображается прямой, параллельной оси $0V$. Поскольку при переходе от точки 1 к точке 2 объем повышается, то на рисунке этот процесс пойдет слева направо.

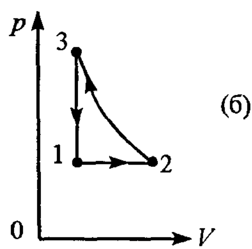
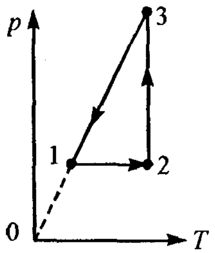


Рис. VI.11

Процесс 2–3 на *рис. VI.11, а* – изотермический, причем объем его уменьшается при переходе от точки 2 к точке 3. Из закона Бойля – Мариотта следует, что при уменьшении объема давление обязательно должно возрастать (pV = const), на что указывает кривая 2–3 на рис.

VI.11, б. Процесс 3-1 на рис. *VI.11, а* соответствует изохорическому процессу, поэтому на рис. *VI.11, б* он изобразится вертикальной прямой 3-1 ($\frac{p}{T}$ = const).



(в)

Рис. VI.11

Изобарический процесс 1−2 в координатах p -T на *рис. VI.11, в* изобразится прямой линией, идущей слева направо, так как T увеличивается в процессе 1−2. Изотермический процесс 2−3 изображается вертикальной прямой, идущей вверх (так как из рисунка видно, что давление в процессе 2-3 увеличивается).

Изохорический процесс 3-1 на рис. *VI.11, в* отразится прямой 3-1, продолжение которой обязательно должно пройти через начало координат, при этом давление должно уменьшаться, что следует из рисунка.

Задача VI.16 В вертикальном цилиндре под тяжелым поршнем находится кислород массой m = 2 кг. Для повышения температуры кислорода на ΔT = 5 К ему было сообщено количество теплоты ΔQ = 9160 Дж. Определить удельную теплоемкость кислорода c, работу, совершаемую им при расширении, и увеличение его внутренней энергии ΔU. Молярная масса кислорода μ = 0,032 кг/моль.

Решение. На поршень действуют три силы: сила тяжести, сила атмосферного давления и сила давления газа, находящегося под поршнем. Так как поршень находится в равновесии, то давление газа под поршнем остается постоянным (сила тяжести и сила атмосферного давления не меняются), поэтому процессс нагревания газа является изобарным. Количество теплоты, сообщаемое кислороду для нагревания, равно

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \text{ или } c_\text{p} m\Delta T = \Delta U + p\Delta V, \quad (1)$$

где c_p – удельная теплоемкость, индекс р указывает, что нагревание газа происходит при изобарном процессе. Эту теплоемкость можно определить из условия задачи

$\Delta Q = c_\text{p} m\Delta T$, или

$$c_\text{p} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} = \frac{9160\,\text{Дж}}{2\,\text{кг}\cdot 5K} = 916\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}.$$

Уравнения состояния газа до и после нагревания на ΔT равны соответственно

$$pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Левая часть этого уравнения является работой при изобарном процессе, поэтому

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot 5}{0{,}032} = 2590\,\text{Дж}.$$

Зная работу, совершенную газом, и количество тепла, сообщенное ему, легко из формулы (1) подсчитать изменение его внутренней энергии

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A = (9160 - 2590)\text{Дж} = 6570\text{Дж}.$$

Задача VI.17 Температура газа массой m с молярной массой μ повышается на величину ΔT один раз при постоянном давлении p, а другой раз — при постоянном объеме V. Насколько отличаются друг от друга количества сообщенных газу теплот ΔQ_p и ΔQ_v и удельные теплоемкости c_p и c_v в этих процессах?

Решение. При любом процессе количество тепла, сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение газом работы, т. е.

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V.$$

При изобарном и изохорном процессах это соотношение запишется соответственно

$$c_p m\Delta T = \Delta U + p\Delta V; \qquad (1)$$

$$c_v m\Delta T = \Delta U. \qquad (2)$$

$\Delta U = \gamma\Delta T$ в обоих процессах одинаково, так как одинаково изменение температуры ΔT. Вычитая из верхнего соотношения нижнее, имеем

$$\Delta Q_p - \Delta Q_v = m\Delta T\left(c_p - c_v\right) = p\Delta V. \qquad (3)$$

Подставляя выражение для работы, полученное в предыдущей задаче для изобарного процесса $\Delta A = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, получим

$$\Delta Q_{p} - \Delta Q_{v} = \frac{m}{\mu} R\Delta T.$$

Соотношение (3) позволяет определить, как отличаются теплоемкости при этих процессах

$$c_{p} - c_{v} = \frac{p\Delta V}{m\Delta T} = \frac{R}{\mu}.$$

Таким образом, теплоемкость газа при изобарном процессе c_{p} больше его теплоемкости при изохорном процессе c_{v}.

Известно, что для идеального газа изменение его внутренней энергии прямо пропорционально изменению его температуры, т.е. $\Delta U = \gamma \Delta T$.

Формула (2) позволяет вычислить коэффициент пропорциональности γ. Действительно, сравнив левую и правую части этой формулы, получим

$$\gamma = c_{v} m.$$

Выражение для работы при изобарном процессе $\Delta A = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ позволяет выяснить физический смысл газовой постоянной R — это работа, которую совершает 1моль газа при изобарном процессе, нагреваясь на 1К.

Задача VI.18 На *рис. VI.12* дан график изменения состояния идеального газа. Посчитать работу, которая совершена газом за полный цикл, если начальные и конечные значения давлений и объемов заданы.

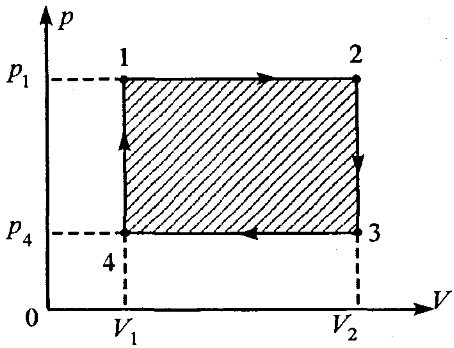


Рис. VI.12

Решение. Работа, совершаемая газом, определяется: $A = p\Delta V$. Круговой процесс, представленный на рисунке, состоит из двух изобар (1-2, 3-4) и двух изохор (2-3, 4-1). При изохорических процессах газ работу не совершает, так как $\Delta V = 0$. Поэтому $A_{2-3} = A_{4-1} = 0$. Работа же газа при изобарических процессах определяется

$$A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1) \text{ и } A_{3-4} = p_4(V_1 - V_2).$$

Таким образом, полная работа за весь цикл равна

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = A_{1-2} + A_{3-4} = (V_2 - V_1)(p_1 - p_4).$$

Как видно из рисунка, эта работа численно равна площади заштрихованного прямоугольника 1234.

Следует отметить, что при любых замкнутых процессах, изображенных в координатах p-V, полная работа равна площади фигуры, лежащей внутри этого цикла (пVI.12).

Задача VI.19 Какое количество тепла ΔQ передано одноатомному газу при переводе его из состояния 1 в состояние 2? $p_1 = 500$кПа, $V_1 = 2$л, $V_2 = 4$л (*рис. VI.13*).

Решение. Процесс 1-2 не относится ни к одному из изопроцессов. Однако из рисунка следует, что давление прямо пропорционально объему, т.е. $p = \gamma V$, где γ — коэффициент пропорциональности. Из этой зависимости легко получается, что

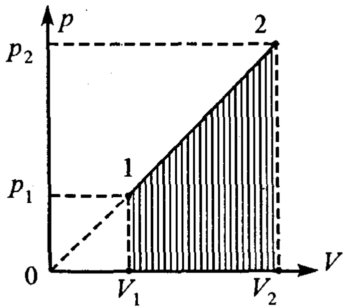


Рис. VI.13

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}, \text{ или } p_2 = p_1 \frac{V_2}{V_1}.$$

Количество тепла, переданное любому газу, определяется первым началом термодинамики (пVI.10)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Для одноатомного газа ΔU легко определить, пользуясь выражением внутренней энергии для одноатомного газа (пVI.9):

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

ΔT вычисляется из объединенного газового закона для двух состояний, т. е.

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2.$$

Вычитая из второго соотношения первое, имеем

$$\frac{m}{\mu}R\Delta T = p_2V_2 - p_1V_1.$$

Подставляя это выражение в формулу для ΔU, получим

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = \frac{3}{2}p_1\left(\frac{V_2^2}{V_1} - V_1\right) = \frac{3}{2}\frac{p_1}{V_1}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Работу ΔA, совершаемую газом при переходе из состояния 1 в состояние 2, можно определить по площади трапеции $V_1 12 V_2$.

$$\Delta A = \frac{p_1 + p_2}{2}\left(V_2 - V_1\right) = \frac{p_1 + p_1\dfrac{V_2}{V_1}}{2}\left(V_2 - V_1\right) =$$

$$= \frac{p_1}{2V_1}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Таким образом, количество тепла, переданное одноатомному газу:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{3}{2}\frac{p_1}{V_1}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \frac{p_1}{2V_1}\left(V_2^2 - V_1^2\right) =$$

$$= 2\frac{p_1}{V_1}\left(V_2^2 - V_1^2\right).$$

Задача VI.20 На *рис. VI.14*, *а* изображен график изменения состояния идеального газа. Пред-

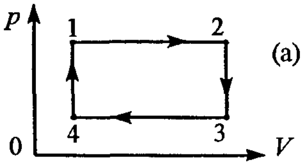


Рис. VI.14

ставить этот круговой процесс в координатах p-T и V-T и определить, на каких участках тепло потребляется, а на каких выделяется.

Решение. Изобарический процесс 1-2 в координатах p-T (*рис. VI.14*, б) изображается прямой, параллельной оси $0T$. Однако он может проходить слева направо (при увеличении температуры) и справа налево (при уменьшении температуры). Для того чтобы определить, как меняется температура, необходимо воспользоваться объединенным газовым законом:

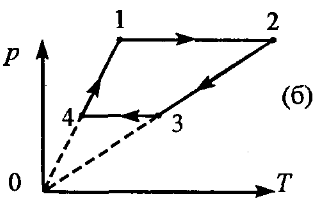


Рис. VI.14

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Из этого уравнения следует: при постоянном давлении с увеличением объема температура увеличивается. Поэтому изобарический процесс протекает слева направо. Процесс 2-3 изохорный, при этом давление p уменьшается: нужно соединить точку 2 с началом координат и по этой прямой опуститься вниз (так как p уменьшается). Процесс 3-4 изобарный, он проходит с уменьшением объема, поэтому и температура будет уменьшаться. Процесс 4-1 изохорный: проводим прямую через точку 1 и начало координат и поднимаемся по этой прямой вверх, так как давление в про-

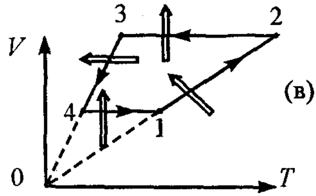


Рис. VI.14

цессе 4-1 увеличивается. Аналогичные рассуждения проводятся и для координат V-T (*рис. VI.14, в*).

Выделенное или поглощенное тепло на различных участках процесса легко получить с помощью первого начала термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V = \gamma\Delta T + p\Delta V.$$

На участке 1-2 $\Delta T > 0$, $\Delta V > 0$ (*рис. VI.14, а*), поэтому $\Delta Q_{1-2} > 0$, т. е. тепло поглощается газом.

На участке 2-3 $\Delta T < 0$, $\Delta V = 0$ (*рис. VI.14, а,б*), поэтому $\Delta Q_{2-3} < 0$, т. е. тепло выделяется.

На участке 3-4 $\Delta T < 0$, $\Delta V < 0$, следовательно $\Delta Q_{3-4} < 0$ — тепло выделяется.

На участке 4-1 $\Delta T > 0$, $\Delta V = 0$ (*рис. VI.14, а,б*), поэтому $\Delta Q_{4-1} > 0$, т. е. тепло поглощается. На *рис. VI.14, (в)* поглощенное и выделенное тепло обозначается двойными стрелочками.

Задача VI.21 Увеличится ли энергия воздуха в обычной комнате, если в ней протопить печь?

Решение. В обычной комнате атмосферное давление не меняется, так же как не меняется ее объем (комната не является герметичной). Поэтому для двух разных температур можно записать

$$p_0V_0 = \frac{m_1}{\mu}RT_1 \quad \text{и} \quad p_0V_0 = \frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

где p_0 — атмосферное давление, V_0 — объем комнаты.

Из этих соотношений видно, что при нагревании комнаты меняется масса воздуха, находящегося в ней (часть воздуха, расширяясь, вытесняется в щели окон и дверей).

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$0 = \frac{m_1}{\mu} RT_1 - \frac{m_2}{\mu} RT_2 = \frac{R}{\mu}\left(m_1 T_1 - m_2 T_2\right), \qquad (1)$$

т. е. $m_1 T_1 - m_2 T_2 = 0$, или $m_1 T_1 = m_2 T_2$.

Так как внутренняя энергия в газе

$$U = \frac{cm}{\mu} RT \text{ (пVI.9)},$$

то ее изменение

$$\Delta U = \frac{cR}{\mu}\left(m_1 T_1 - m_2 T_2\right). \qquad (2)$$

Из соотношения (1) следует, что изменение внутренней энергии в комнате равно нулю, т. е. энергия воздуха в обычной комнате при ее нагревании не изменится.

Задача VI.22 В запаянной U-образной трубке находится вода. Как узнать, воздух или только насыщенный пар жидкости находится над водой в трубке?

Решение. Давление насыщенного пара *не зависит* от изменения объема. Поэтому если трубку наклонить, то при насыщенном паре уровни воды в ее коленах будут одинаковыми; если же над водой находится воздух, то при изменении его объема меняется и давление, поскольку они связаны законом Бойля – Мариотта. Поэтому уровни воды в коленах U-образной трубки будут разными.

Задача VI.23 Относительная влажность воздуха, заполняющего сосуд объемом $V_0 = 0{,}5\,\text{м}^3$ при температуре $t_0 = 23^\circ\text{C}$, равна $\varphi = 60\,\%$. Сколько нужно испарить в этот объем воды до полного насыщения пара? Давление насыщающих паров при этой температуре $p_\text{н} = 21{,}7\,\text{мм рт. ст.}$ Молярная масса водяных паров $\mu = 18$ г/моль.

Решение. Пары воды при температуре $t_0 = 23^\circ\text{C}$ не насыщенные, их давление $p_n = \varphi p_\text{н}$ (пVI.16). Их массу можно определить из объединенного газового закона

$$\frac{p_n V_0}{T_0} = \frac{m}{\mu} R\text{, или } m = \frac{p_n V_0 \mu}{T_0 R} = \frac{\varphi p_\text{н} V_0 \mu}{T_0 R}.$$

Масса насыщенных паров определяется из того же уравнения, но при насыщении

$$m_\text{н} = \frac{p_\text{н} V_0 \mu}{T_0 R}.$$

Разность этих масс и является тем количеством воды, которое нужно добавить в сосуд до полного насыщения пара

$$m_\text{н} - m = \frac{p_\text{н} V_0 \mu}{T_0 R}(1 - \varphi) =$$

$$= \frac{0{,}0217\,\text{м} \cdot 13{,}6 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3 \cdot 10\,\text{м/с} \cdot 0{,}5\,\text{м}^3 \cdot 18\,\text{г/моль}}{(273+23)\,\text{К} \cdot 8{,}31\,\text{Нм/К}} = 4\,\text{г}.$$

Задача VI.24 Смешали $V_1 = 1\text{м}^3$ воздуха с влажностью $\varphi_1 = 20\,\%$ и $V_2 = 2\text{м}^3$ с влажностью $\varphi_2 = 30\,\%$. Обе порции воздуха взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем $V = V_1 + V_2$. Определить ее относительную влажность.

Решение. Давление воздуха в сосуде объемом V_1 равно $p_1 = \varphi_1 p_н$, а в сосуде объемом $V_2 \to p_2 = \varphi_2 p_н$. При смешении воздуха давление смеси определяется из закона Дальтона

$$p_{см} = p'_1 + p'_2,$$

где p'_1 и p'_2 – парциальные давления смешиваемых газов.

Так как смешение происходит при постоянной температуре, то выполняется закон Бойля – Мариотта:

$$p_1 V_1 = p'_1\,V;\;\; p_2 V_2 = p'_2\,V,\ \text{где}\ V = V_1 + V_2.$$

Отсюда

$$p'_1 = \frac{p_1 V_1}{V};\;\; p'_2 = \frac{p_2 V_2}{V}.$$

Таким образом

$$p_{см} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} = \frac{\varphi_1 p_н V_1 + \varphi_2 p_н V_2}{V} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V} p_н.$$

Из этого соотношения легко получить относительную влажность смеси

$$\varphi_{см} = \frac{p_{см}}{p_{н}} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V} = \frac{\varphi_1}{3} + \frac{2\varphi_2}{3} = 0{,}27 = 27\%.$$

Задача VI.25 Давление насыщающего водяного пара при температуре $t = 27^\circ C$ равно $p_{н} = 44{,}6$ мм рт. ст. Какова масса при этой температуре влажного воздуха объемом $V_1 = 1 м^3$ при относительной влажности $\varphi = 80\%$ и давлении $p_0 = 1$ атм? $\mu_{в} = 0{,}029$ кг/моль, $\mu_{п} = 0{,}018$ кг/моль.

Решение. Влажный воздух состоит из сухого воздуха и водяного пара. Поэтому полное давление влажного воздуха равно сумме давлений воздуха и пара, т. е.

$p_0 = p_{в} + p_{п}$, при этом $p_{п} = \varphi p_{н}$.

Таким образом, давление воздуха

$p_{в} = p_0 - p_{п} = p_0 - \varphi p_{н} = (760 - 0{,}8 \cdot 44{,}6)$ мм рт. ст. $= 724{,}3$ мм рт. ст.

Масса влажного воздуха $m = m_{в} + m_{п}$. Массу сухого воздуха $m_{в}$ и водяного пара $m_{п}$ можно вычислить из объединенного газового закона:

$$m_{в} = \frac{\mu_{в} p_{в} V_0}{RT}; \; m_{п} = \frac{\mu_{п} p_{п} V_0}{RT} = \frac{\mu_{п} \varphi p_{н} V_0}{RT}.$$

Таким образом, масса влажного воздуха равна

$$m_{в} = \frac{\mu_{в} p_{в} V_0}{RT} + \frac{\mu_{п} \varphi p_{н} V_0}{RT} = \frac{V_0}{RT}\left(\mu_{в} p_{в} + \mu_{п} \varphi p_{н}\right) = 143 \text{ г}.$$

Задача VI.26 В цилиндре объемом $V_0 = 10$ л под поршнем находится влажный воздух при температуре $t = 20^{\circ}C$ и относительной влажности $\varphi = 70\%$. Объем цилиндра при той же температуре уменьшили в $n = 10$ раз таким образом, что на стенках сосуда появились капли жидкости. Каково стало давление в цилиндре, если начальное давление $p_0 = 100$ мм. рт.ст.? Давление насыщающего пара при температуре t_0 равно $p_н = 18$ мм рт. ст.

Решение. Давление влажного воздуха складывается из давления сухого воздуха и давления паров, т. е.

$$p_0 = p_в + p_п = p_в + \varphi p_н.$$

Поскольку процесс изотермический ($T = \text{const}$), то при уменьшении объема в n раз, давление воздуха увеличится в n раз, т. е.

$$p'_в = np_в, \text{ или } p'_в = n\left(p_0 - \varphi p_н\right).$$

Так как на стенках цилиндра появились капельки воды, то пар стал насыщенным. Поэтому новое давление влажного воздуха в цилиндре

$$p = p'_в + p_н = \left(p_0 - \varphi p_н\right)n + p_н = 892 \text{ мм рт. ст.}$$

В задаче не учтен тот факт, что сконденсированные пары тоже могут занимать некоторый объем. Этим объемом мы пренебрегли, однако его можно оценить. Масса пара в цилиндре определяется из объединенного газового закона.

Объем всех сконденсированных паров

$$V = \frac{m}{\rho_п} = \frac{\mu V_0 \varphi p_н}{(273 + t)R\rho} = 0{,}11 \text{ см}^3.$$

По сравнению с $V = \dfrac{V_0}{n} = 1\text{л}$ это пренебрежимо малый объем.

Задача VI.27 В сосуде смешиваются три химически не взаимодействующие жидкости, имеющие массы $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 5$ кг; температуры $t_1 = 6^\circ\text{C}$, $t_2 = -40^\circ\text{C}$, $t_3 = 60^\circ\text{C}$ и удельные теплоемкости $c_1 = 2\,\text{кДж/кг}\cdot\text{К}$, $c_2 = 4\,\text{кДж/кг}\cdot\text{К}$, $c_3 = 2\,\text{кДж/кг}\cdot\text{К}$ соответственно. Определить температуру смеси и количество теплоты, необходимое для последующего нагревания смеси до $t = 6^\circ\text{C}$.

Решение. В сосуде жидкости, нагреваясь, остаются в том же агрегатном состоянии, поэтому легко записать для них уравнение теплового баланса:

$$\sum \Delta Q_i = 0, \text{ т. е. } \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0, \text{ или}$$

$$c_1 m_1 \Delta T_1 + c_2 m_2 \Delta T_2 + c_3 m_3 \Delta T_3 = 0.$$

$$c_1 m_1 (\Theta - t_1) + c_2 m_2 (\Theta - t_2) + c_3 m_3 (\Theta - t_3) = 0,$$

где Θ – температура смеси,

$$\Theta = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + c_3 m_3 t_3}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3} =$$

$$= \frac{2\cdot 1\cdot 6 + 4\cdot 10\cdot(-40) + 2\cdot 5\cdot 60}{2\cdot 1 + 4\cdot 10 + 2\cdot 5} = \frac{-1900}{100} = -19^\circ\text{ C}.$$

Таким образом, температура смеси Θ равна -19° С. Далее эту смесь нужно нагреть до $t = 6^\circ\text{C}$.

Для этого ей необходимо сообщить количество тепла

$$\Delta Q = c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T + c_3 m_3 \Delta T =$$
$$= \Delta T\left(c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3\right) = 1300\,\text{кДж}$$

(при этом считается, что теплоемкости жидкостей при изменении температуры не меняются).

Задача VI.28 В калориметре находится $m_1 =$ $=500$ г воды при температуре $t_1 = 5^\circ\text{C}$. К ней долили еще $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = 10^\circ\text{C}$ и положили $m_3 = 400$ г льда при температуре $t_3 = -60^\circ\text{C}$. Какая температура установится в калориметре? $c_в = 1\dfrac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}}$; $c_л = 0{,}5\dfrac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}}$; удельная теплота плавления льда $\lambda = 80\dfrac{\text{кал}}{\text{г}}$.

Решение. Записать уравнение теплового баланса в этой задаче трудно, так как неизвестно, сколько льда растает и будет ли он таять вообще. Поэтому необходимо сделать предварительные оценки. Оценки проведем в системе СГС, так как в молекулярной физике это делать удобнее, поскольку удельные теплоемкости выражаются однозначными цифрами (а не четырехзначными!).

Лед находится при $t_3 = -60^\circ\text{C}$, поэтому при наличии воды с плюсовой температурой он будет нагреваться. Но для того чтобы его нагреть до нуля градусов, ему нужно сообщить

$$Q_1 = c_л m_л \Delta t = 0{,}5 \cdot 400 \cdot 60 \, кал = 12500 \, кал.$$

Это тепло лед может получить за счет остывания воды. Вода же, остывая до $0^\circ C$, может выделить тепла

$$Q_2 = c_в m_1 \Delta t_1 + c_в m_2 \Delta t_2 = (500 \cdot 5 + 200 \cdot 10) кал =$$
$$= 4500 \text{ кал.}$$

Но этого количества тепла мало для нагревания льда до $0^\circ C$, поэтому часть воды еще замерзнет и при этом выделит количество тепла

$$Q_3 = m_х \lambda,$$

где $m_х$ количество воды, которое должно замерзнуть, чтобы лед довести до нуля градусов.

Теперь можно записать уравнение теплового баланса:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, \text{ или } Q_3 = m_х \lambda = Q_1 - Q_2 = 8000 \, кал.$$

Таким образом, замерзнуть должно $m_х$ граммов воды

$$m_х = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} = \frac{8000 \, кал}{80 \, кал/г} = 100 \, г.$$

После того как в калориметре установится температура $0^\circ C$, все процессы прекратятся. Следовательно, в калориметре будет смесь льда и воды при температуре $t = 0^\circ C$, при этом льда будет

$$m_л = 400 \text{ г} + 100 \text{ г} = 500 \text{ г},$$

а воды

$m_в = 500$ г + 200 г − 100 г = 600 г.

Задача VI.29 В калориметре с теплоемкостью $C = 600\,Дж/град$ находится $m = 1кг$ льда. Какое количество тепла Q_1 и Q_2 нужно сообщить калориметру со льдом, чтобы нагреть его на 2 градуса: а) от температуры $T_1 = 270К$ до $T_2 = 272К$; б) от температуры $T_1 = 272К$ до температуры $T_2 = 274К$? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2\dfrac{кДж}{кг\cdot град}$, а льда $c_л = 2{,}1\dfrac{кДж}{кг\cdot град}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330\dfrac{кДж}{кг}$.

Решение. Если внимательно прочитать условие задачи, то можно заметить, что в первом случае лед в калориметре нагревается от $t_1 = -3^\circ C$ до $t_2 = -1^\circ C$, т. е. он пребывает еще в твердом состоянии. В этом случае необходимо сообщить количество теплоты для нагревания калориметра и льда:

$$Q_1 = C\Delta T + mc_л\Delta T = \Delta T(C + mc_л) = 2(0{,}6 + 1\cdot 2{,}1)\,кДж =$$
$$= 5{,}4\ кДж.$$

Во втором случае лед в калориметре нагревается от $t_1 = -1^\circ C$ до $t_2 = +2^\circ C$, а это значит, что тепло должно сообщаться: на нагревание калориметра на 2 градуса, на нагревание льда сначала на 1 градус, затем на таяние льда, а затем на нагревание растаявшей воды еще на 1 градус, т. е.

$$Q_2 = C\Delta T + mc_л\frac{\Delta T}{2} + \lambda m + mc_в\frac{\Delta T}{2} = 337{,}5\,кДж.$$

Как видно, во втором случае приходится тратить тепла существенно больше.

Задача VI.30 Гелий массой m, заключенный в цилиндр под поршень, очень медленно переводится из состояния 1 с объемом V_2 и давлением p_1 в состояние 2 с объемом V_1 и давлением p_2 (*рис. VI.15, а*). Какая максимальная температура будет у газа при этом процессе, если на графике зависимости давления от объема процесс изображен прямой 1-2?

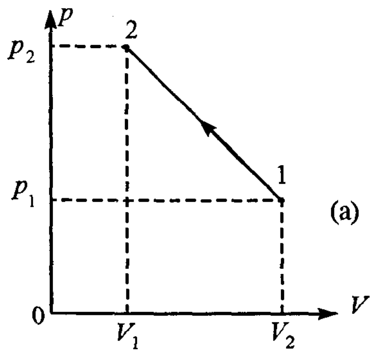


Рис. VI.15

Решение. Аналогичная задача уже была рассмотрена (задача VI.6), но только качественно. Теперь же мы получим закон, по которому меняется температура, и определим ее максимальное значение. Уравнение прямой 1-2 записывается:

$$p = aV + b, \qquad (1)$$

где постоянные a, b определяются из начального и конечного состояний газа.

Действительно,

$$p_1 = aV_1 + b;$$
$$p_2 = aV_2 + b.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_1 - V_2}; \; b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}.$$

Подставив уравнение (1) в объединенный газовый закон, получим выражение для изменения температуры:

$$(aV+b)V=\frac{m}{\mu}RT\text{, или } aV^2+bV=\frac{m}{\mu}RT.$$

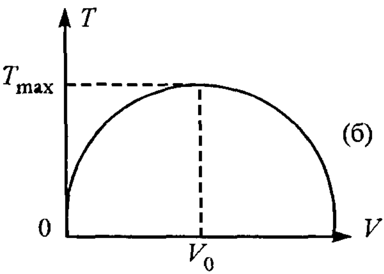


Рис. VI.15

Как видно из уравнения, температура меняется по параболе, а график ее изменения представлен на *рис. VI.15*, б. Кривая эта достигает максимального значения температуры при

$$V_0=-\frac{b}{2a},$$ когда совпадут корни квадратного уравнения (объем, при котором температура достигает максимального значения, можно определить, исследовав параболическое уравнение на экстремум).

Давление p_0, соответствующее максимальной температуре, определяется по формуле

$$p_0=aV_0+b,$$

где V_0 – объем, соответствующий максимальной температуре.

Объединенный газовый закон позволяет вычислить значение этой максимальной температуры:

$$T_{\max}=\frac{p_0V_0\mu}{mR}=\frac{(aV_0+b)V_0\mu}{mR},$$

где a, b, V_0 мы определили по ходу решения задачи.