$$Q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi);\ \ Q_2 = C_2(\varphi_2 - \varphi);\ \ Q_3 = C_3(\varphi_3 - \varphi).$$

Тогда $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, или

$$C_1(\varphi_1 - \varphi) + C_2(\varphi_2 - \varphi) + C_3(\varphi_3 - \varphi) = 0,$$

откуда $\varphi = \dfrac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3}{C_1 + C_2 + C_3}$.

VIII. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

пVIII.1 Электрический ток – *это направленное движение электрических зарядов.*

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qn\overline{v}S,$$

где q – заряд одной частицы, n – концентрация частиц, $\overline{v}$ – средняя скорость движения частиц, S – площадь поперечного сечения проводника.

пVIII.2 *Электродвижущая сила* $\mathcal{E}$ *(ЭДС) равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.*

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}.$$

пVIII.3 Закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где U – разность потенциалов на концах участка цепи, R – сопротивление участка.

пVIII.4 Закон Ома для замкнутой цепи: *сила тока в замкнутой цепи (рис. VIII.1) равна отношению ЭДС к полному сопротивлению цепи:*

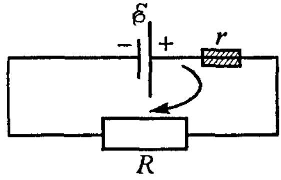


Рис. VIII.1

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r},$$

где r — внутреннее сопротивление источника ЭДС.

пVIII.5 Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС: *разность потенциалов на концах участка цепи, содержащего ЭДС, равна величине этой ЭДС минус произведение силы тока на внутреннее сопротивление (r) источника ЭДС (рис. VIII.2):* $U_{AB} = \mathscr{E} - Ir$.

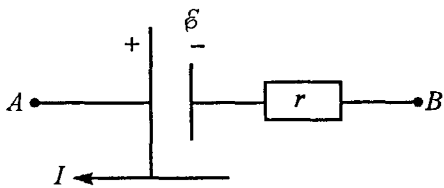


Рис. VIII.2

пVIII.6 Для проводников, диаметр которых намного меньше их длины ($d << l$), существует связь между сопротивлением проводника и его размерами:

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление.

пVIII.7 Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t),$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при $0^\circ C$, α – температурный коэффициент сопротивления. Для металлов эта зависимость часто записывается так:

$$\rho = \frac{\rho_0 T}{T_0},$$

где T – температура по шкале Кельвина, $T_0 = 273^\circ K$.

пVIII.8 При последовательном соединении проводников их сопротивления складываются, т. е.

$$R_0 = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i,$$

где R_0 – общее сопротивление.

При параллельном соединении проводников складываются их проводимости, т. е.

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}.$$

пVIII.9 Для уменьшения чувствительности амперметра в n раз параллельно ему необходимо подключить шунтирующее сопротивление $R_ш$.

$$R_ш = \frac{R_а}{n-1},$$

где $R_а$ – сопротивление амперметра.

Для уменьшения чувствительности вольтметра в n раз к нему последовательно необходимо подключить дополнительное сопротивление $R_д$.

$$R_{д} = R_{в}(n-1).$$

пVIII.10 При расчете схем, состоящих из нескольких узлов и ветвей, пользуются двумя основными законами:

1) законом сохранения зарядов – *в каждом узле количество зарядов, притекающих в единицу времени, равно количеству зарядов, утекающих за это же время, другими словами, сумма всех токов в узле с учетом знака всегда равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0;$$

2) *работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю*, при этом если при обходе контура на любом элементе идем от большего потенциала к меньшему, то работа берется со знаком «+», если же идем от меньшего потенциала к большему, то со знаком «−».

В радиотехнике эти два закона используются в *правилах Кирхгофа*:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} I_i = 0;\ \ 2)\ \sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_k,$$

где $I_i R_i$ – падение напряжения на элементах, $\mathcal{E}_k$ – ЭДС, входящие в контур.

пVIII.11 Закон Джоуля-Ленца: *количество теплоты, выделенной протекающим током на некотором участке цепи, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления этого участка и времени прохождения тока:*

$$Q = I^2 R t.$$

пVIII.12 Мощность — *это работа, совершаемая в единицу времени:*

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Мощность, развиваемая источником ЭДС, равна $N_0 = \mathcal{E}I$.

Мощность, выделяемая при нагревании проводников, $N_1 = I^2R = \frac{U^2}{R}$.

Если в цепи нет механических (химических) взаимодействий, то $N_0 = N_1$, в противном случае $N_0 > N_1$.

пVIII.13 Коэффициент полезного действия — *отношение полезной мощности к полной, развиваемой в цепи:*

$$\eta = \frac{N_{\text{полез}}}{N_{\text{полн}}}.$$

пVIII.14 Законы электролиза: *масса любого вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна полному заряду, прошедшему через электролит, т.е.*

1) $m = kq = kIt$ — *первый закон Фарадея*, где k — коэффициент пропорциональности, называемый электрохимическим эквивалентом данного вещества;

2) $m = \frac{\mu It}{Fn}$ — *второй закон Фарадея*, где F — постоянная Фарадея, n — валентность вещества, μ — молярная масса.

Задача VIII.1 Определить среднюю скорость $\vec{v}$ направленного движения электронов вдоль медного проводника при плотности тока $j = 11\,\text{А/мм}^2$, если считать, что на каждый атом меди в металле имеется один свободный электрон. Молярная масса меди $\mu = 64$ г/моль, плотность меди $\rho = 8{,}9\,\text{г/см}^3$.

Решение. Часто при решении задач на постоянный ток пользуются понятием *плотности тока — это ток, протекающий через единичную поверхность*, т. е. $j = \dfrac{I}{S} = ne\overline{v}$ (см. пVIII.1), где n – концентрация электронов, e — заряд электрона, $\overline{v}$ — средняя скорость движения электронов.

Из последнего выражения следует, что $\overline{v} = {}^{j}\!/_{ne}$. Концентрация n по определению равна

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m}{\mu}\frac{N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{\mu}.$$

Подставив это соотношение в выражение для скорости, получим

$$\overline{v} = \frac{j\mu}{e\rho N_A} = 8{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{м/с} = 0{,}82\,\text{мм/с}.$$

Как видно, средняя скорость направленного движения электронов весьма незначительная.

Задача VIII.2 К источнику ЭДС подключили три сопротивления, как указано на *рис. VIII.3*,

$R_1 = R_2 = R_3 = R$. Определить общее сопротивление схемы и ток I протекающий через источник $\mathcal{E}$.

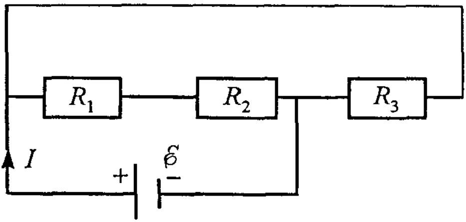


Рис. VIII.3

Решение. Сопротивления R_1 и R_2 соединены последовательно. Их общее сопротивление $R' = R_1 + R_2 = 2R$. Сопротивление R_3 подсоединено параллельно сопротивлению R', поэтому общее сопротивление цепи

$$R_0 = \frac{RR_3}{R + R_3} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3}\ R;\ \ I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} = \frac{3\,\mathcal{E}}{2R}.$$

Задача VIII.3 Определить сопротивление куба, подключенного в цепь как показано на *рис. VIII.4, а*. Сопротивление каждой грани куба r.

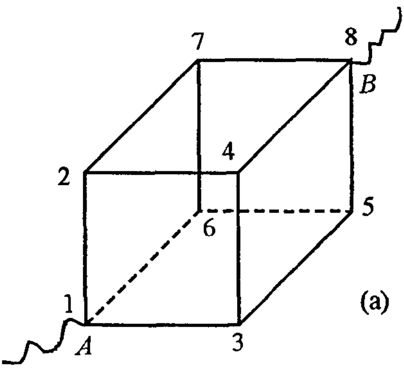
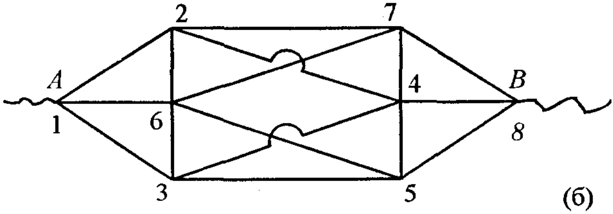
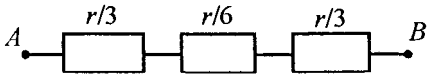


Рис. VIII.4

Решение. В силу симметрии схемы ясно, что потенциалы точек 2, 3, 6 одинаковы, так же как и потенциалы точек 4, 5, 7.



(б)



(в)

Рис. VIII.4

Точки равного потенциала можно соединить единым проводом, от этого в схеме ничего не изменится, но она будет выглядеть по другому (*рис. VIII.4, б*). Теперь сопротивление куба вычислить просто. Общее сопротивление между точками 1 и 3; 5 и 8 равно $r/3$, а сопротивление между точками 2 и 7 равно $r/6$ (*рис. VIII.4*, б). Общее сопротивление всего куба (между точками A и B) равно (*рис. VIII.4, в*):

$$R_{AB} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r.$$

Задача VIII.4 На рис. VIII.5 изображен мостик для измерения сопротивлений (мостик Уитстона). Неизвестное сопротивление R_x, R_0 – эталонное сопротивление. Вольтметр соединен скользящим контактом с однородным проводом большого сопротивления AB (реохорд). Расстояние контакта D от точек A и B можно измерить с помощью сантиметра, который лежит рядом с высокоомным сопротивлением AB. В тот момент, когда показания вольтметра равны нулю, фиксируются расстояния l_1 и l_2. Определить неизвестное сопротивление R_x.

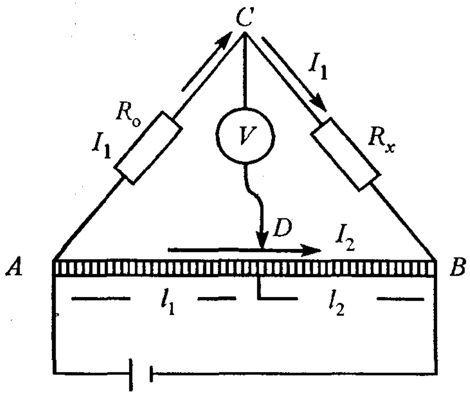


Рис. VIII.5

Решение. Так как разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_D = 0$, то ток I_1, текущий через сопротивление R_0, далее потечет через сопротивление R_x, а ток I_2 протекает через реохорд AB. Через вольтметр V ток не протекает, так как $\varphi_C - \varphi_D = 0$. Поскольку потенциал точки C равен потенциалу точки D, то можно записать

$$I_1R_0 = I_2r_1; \quad I_1R_x = I_2r_2,$$

где r_1 – сопротивление участка проволоки AB длиною l_1, r_2 – сопротивление проволоки длиною l_2. Разделив эти два соотношения друг на друга, получим

$$\frac{R_0}{R_x} = \frac{r_1}{r_2}, \text{ или } R_x = \frac{R_0 r_2}{r_1}.$$

Сопротивления r_1 и r_2 связаны с длиной проводников следующим образом (см. п.VIII.6):

$$r_1 = \rho\frac{l_1}{S}; \ r_2 = \rho\frac{l_2}{S}.$$

Поэтому $R_x = \dfrac{R_0 l_2}{l_1}$.

Задача VIII.5 Два одинаковых аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r соединены один раз последовательно, другой — параллельно (*рис. VIII.6*). Определить разность потенциалов между точками A и B в обоих случаях.

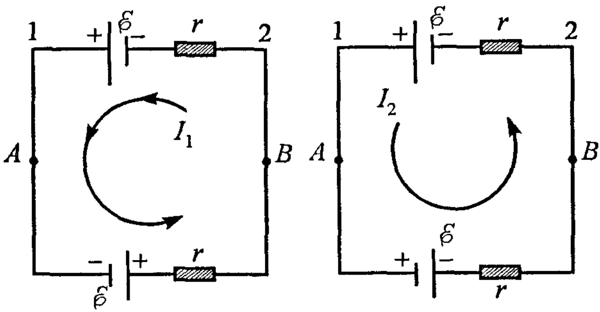


Рис. VIII.6

Решение. При последовательном соединении источников по контуру течет ток $I_1 = \dfrac{2\mathcal{E}}{2r} = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$.

Выберем контур $A12BA$. При обходе этого контура против часовой стрелки получим

$$U_{AB} + I_1 r - \mathcal{E} = 0\text{, отсюда}$$

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_1 r = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r} r = 0.$$

Следовательно, при последовательном соединении источников разность потенциалов между точками A и B равна нулю.

В контуре может быть сколько угодно одинаковых элементов, соединенных последовательно. Напряжение между любыми элементами всегда будет равно нулю (*рис. VIII.7*).

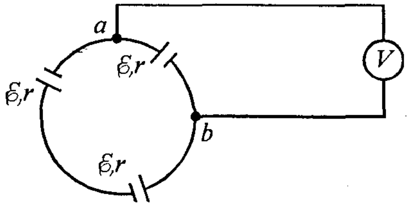


Рис. VIII.7

При параллельном соединении источников ток в контуре равен $I_2 = \dfrac{\mathcal{E} - \mathcal{E}}{2r} = 0$. Вновь обходим верхнюю часть контура против часовой стрелки, получаем $U_{AB} + I_2 r - \mathcal{E} = 0$, тогда

$$U_{AB} = \mathcal{E} - I_2 r = \mathcal{E} - 0 = \mathcal{E}.$$

Таким образом, при параллельном соединении источников разность потенциалов между точками A и B равна $\mathcal{E}$. Если параллельно включено n одинаковых источников с одинаковыми внутренними сопротивлениями, то разность между точками A и В всегда равна $\mathcal{E}$. Если же источники разные, то $U_{AB} \neq \mathcal{E}$.

Задача VIII.6 Цепь с внешним сопротивлением R (*рис. VIII.8*) питается от батареи, состоящей из

N элементов. Каждый элемент имеет сопротивление r и ЭДС $\mathscr{E}_0$. Батарея состоит из одинаковых последовательно соединенных элементов, которые соединены в параллельные группы. Определить число групп n и число элементов в группах m, при которых будет получена наибольшая сила тока в цепи.

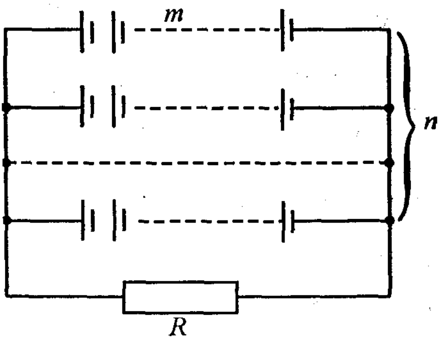


Рис. VIII.8

Решение. Сопротивление каждой группы $R_1 = mr$, а $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 m$. Групп же таких будет $n = N/m$. Общее сопротивление всех групп равно

$$R_2 = \frac{R_1}{n} = \frac{R_1 m}{N}.$$

Следовательно, сила тока, протекающего через сопротивление R, при любом значении m определяется

$$I = \frac{\mathscr{E}_0 m}{R_2 + R} = \frac{\mathscr{E}_0 m}{R_1 m / N + R} = \frac{\mathscr{E}_0 m}{rm^2 / N + R}.$$

Максимум этого выражения достигается при $\frac{rm^2}{N} = R$.

Батарея из N элементов дает наибольшую силу тока тогда, когда ее внутреннее сопротивление равно сопротивлению внешней цепи, т. е. когда $R_2 = R$, или $\frac{rm^2}{N} = R$. Таким образом:

$$m = \sqrt{\frac{RN}{r}}, \text{ а } n = \frac{N}{m} = \sqrt{\frac{rN}{R}}.$$

Задача VIII.7 В схеме, изображенной на рис. VIII.9, определить токи в каждой ветви. $\mathcal{E}_1 = 15$ В, $\mathcal{E}_2 = 30$ В, $r_1 = 3$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $R = 8$ Ом.

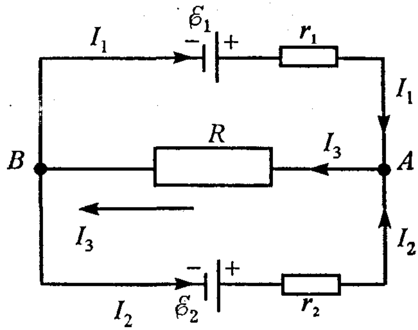


Рис. VIII.9

Решение. Выберем направление токов, как показано на рисунке (хотя Вы можете выбрать направление токов, как пожелаете!). Применив закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС (пVIII.5), можно записать:

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1;\ U_{AB} = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2;\ U_{AB} = I_3 R.$$

Тогда значение токов, полученных из этих выражений, будут:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1};\ I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2};\ I_3 = \frac{U_{AB}}{R}.$$

Так как алгебраическая сумма токов для любого узла равна нулю, то $I_1 + I_2 - I_3 = 0$, или $I_3 = I_1 + I_2$ (*рис. VIII.9*, точка A) и тогда

$$\frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2}.$$

Перепишем это уравнение иначе:

$$U_{AB}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2},$$

отсюда

$$U_{AB} = \frac{\mathcal{E}_1/r_1 + \mathcal{E}_2/r_2}{1/R_3 + 1/r_1 + 1/r_2}.$$

Подставляя цифровые значения, получим $U_{AB} = 16\ \text{В}$, тогда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U_{AB}}{r_1} = -1/3\,A;\ I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - U_{AB}}{r_2} = 2\,1/3\,A;$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{r_3} = 2A.$$

Таким образом, направление токов I_2 и I_3 мы выбрали правильно, а ток I_1 на самом деле течет от точки A в точку B, о чем говорит знак «−»

Задача VIII.8 Какой ток потечет через амперметр с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением в схеме, изображенной на рис. VIII.10? $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = R = 10$ Ом, $\mathcal{E} = 7{,}5$ В.

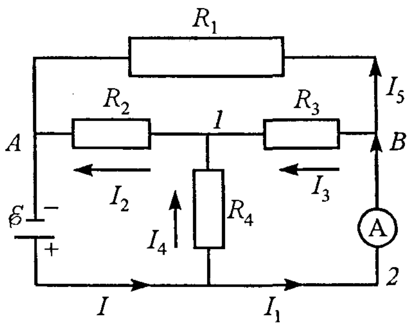


Рис. VIII.10

Решение. Выберем направление токов в ветвях схемы, как указано на рисунке. Сопротивление амперметра равно нулю, поэтому сопротивления R_3 и R_4 можно считать включенными параллельно, а сопротивление участка *1*−*2* равно $R/2$. Тогда сопротивление участка AB

$$R_{AB} = \frac{R_1\left(R_2 + R/2\right)}{R_1 + \left(R_2 + R/2\right)} = \frac{R_1 \cdot 3/2\, R}{R_1 + 3/2\, R} \doteq 7{,}5 \text{ Ом}.$$

Ток I, проходящий через источник $\mathcal{E}$, равен $I = \mathcal{E}/R_{AB} = 1$ А. Через сопротивление R_2 течет половина этого тока, так как сопротивление участка $A1$−2, равное $R_2 + R/2 = 3/2\, R$, параллельно сопротивлению R_1 и поэтому $I_2 = I/2 = 1/2$ А. Токи, текущие через сопротивления R_4 и R_3, одинаковы и равны половине тока I_2 $(R_3 = R_4 = R)$, т. е. $I_4 = I_3 = {}^{I_2}\!/_2 = {}^1\!/_4$ А.

Поскольку ток I, проходящий через источник, равен $I = I_4 + I_1$, где I_1 – ток, протекающий через амперметр, то $I_1 = I - I_4 = {}^3\!/_4$ А.

Задача VIII.9 В схеме, изображенной на *рис. VIII.11, (а)* заданы сопротивления: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 7$ Ом и $\mathcal{E} = 36$ В. Определить ток на участке CD. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

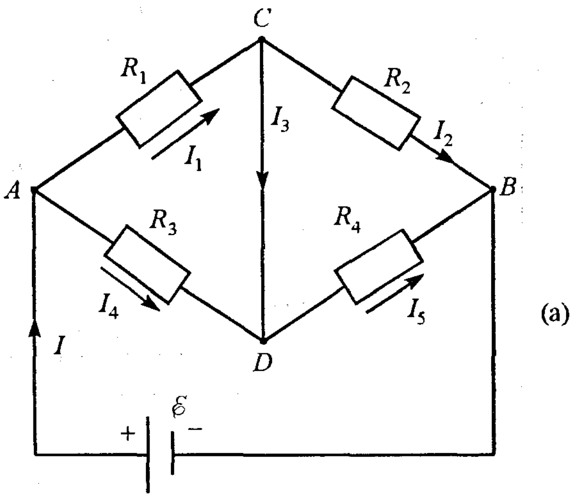


Рис. VIII.11

Решение. Разность потенциалов между точками C и D равна нулю, потому что сопротивление участка CD равно нулю, но ток через этот участок протекает и он может быть любым.

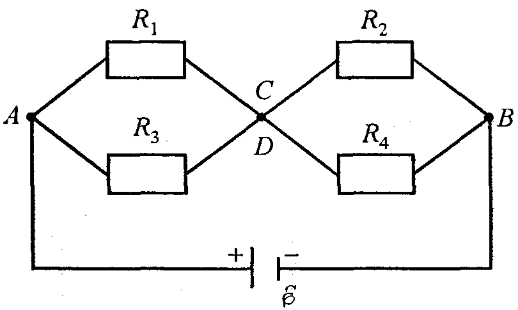
Так как разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_D = 0$, то схему можно изобразить по-другому (*рис. VIII.11, б*). Общее сопротивление участков AC и CB равны:

$$R_{AC} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} = 1{,}5\ \text{Ом};$$

$$R_{CB} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} = 2{,}1\ \text{Ом}$$

как сопротивления параллельно включенных проводников, а сопротивление участка AB

$$R_{AB} = R_{AC} + R_{CB} = 3{,}6\ \text{Ом}.$$



(б)

Рис. VIII.11

Направление токов в каждой ветви схемы мы можем выбирать произвольно. При выборе направлений токов, указанных на *рис. VIII.11, (а)*, ток на участке CD $I_3 = I_1 - I_2$, причем ток $I_1 = \dfrac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1}$,

а ток $I_2 = \dfrac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2}$. В свою очередь $\varphi_A - \varphi_C = IR_{AC}$,

а $\varphi_C - \varphi_B = IR_{CB}$.

Таким образом, нам остается вычислить общий ток I. Он легко определяется из закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AC} + R_{CB}} = \frac{36}{3{,}6} = 10\text{ А}, \text{ тогда}$$

$$\varphi_A - \varphi_C = IR_{AC} = 15\text{ В}, \quad \varphi_C - \varphi_B = IR_{CB} = 21\text{ В}.$$

$$\text{Ток } I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R_1} = \frac{IR_{AC}}{R_1} = \frac{\mathcal{E}R_{AC}}{R_1(R_{AC} + R_{CB})} = 7{,}5\text{ А}.$$

$$\text{Ток } I_2 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R_2} = \frac{IR_{CB}}{R_2} = \frac{R_{CB}}{R_2(R_{AC} + R_{CB})} = 7\text{ А}.$$

$$I_{CD} = I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}5\text{ А}.$$

В этой задаче цифровые значения сопротивлений, токов и напряжений приходилось получать по ходу решения, чтобы избежать очень громоздких выражений.

Задача VIII.10 В схеме, изображенной на *рис. VIII.12*, заданы все элементы. Посчитать токи, протекающие в ветвях этой схемы.

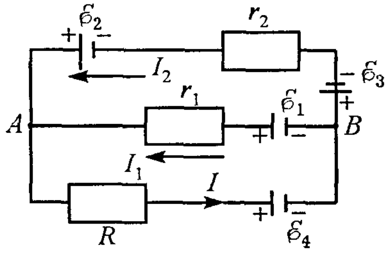


Рис. VIII.12

Решение. В этой схеме имеется три ветви: $A\mathcal{E}_2B$, $A\mathcal{E}_1B$, $A\mathcal{E}_4B$.

Направление токов в ветвях выбирается произвольно. Направим их так, как показано на рисунке. Тогда для узла A запишем

$$I_1 + I_2 - I = 0. \qquad (1)$$

Для определения трех неизвестных величин нужно иметь три уравнения. Два остальных уравнения мы получим, если запишем работу электрического поля по перенесению единичного положительного заряда вдоль контура. Выберем замкнутые контуры $A\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3BA$ и $A\mathcal{E}_4B\mathcal{E}_1A$, причем второй контур надо выбирать так, чтобы в него вошел хотя бы один элемент, не вошедший в предыдущий контур.

Обход контура можно проводить в любом направлении (хотя удобнее – по току). Если при обходе контура на любом элементе идем от большего потенциала к меньшему, то падение напряжения берется со знаком «+», если же идем от меньшего потенциала к большему, то со знаком «−». Для контура $A\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3BA$

$$\mathcal{E}_2 - I_2 r_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1 = 0. \qquad (2)$$

Для контура $A\mathcal{E}_4B\mathcal{E}_1A$

$$IR + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_1 + I_1 r_1 = 0. \qquad (3)$$

Теперь мы имеем три уравнения и три неизвестных тока сможем определить. Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), получим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4 + {}^{R}\!/_{r_2}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2)}{R - r_1 + R\,{}^{r_1}\!/_{r_2}};$$

$$I_2 = \frac{{}^{R}\!/_{r_2}\left(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2\right) + \left(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_4\right)}{R - r_1 + {}^{Rr_1}\!/_{r_2}}\,\frac{r_1}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1}{r_2};$$

$$I = I_1 + I_2.$$

Если при подстановке числовых значений величин какой-либо ток окажется положительным, значит, его направление выбрано верно, если отрицательным, значит, ток течет на самом деле противоположно тому направлению, которое мы выбрали.

Задача VIII.11 Определить падение напряжения на конденсаторе C, присоединенном к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 3{,}9$ В по схеме, изображенной на рис. VIII.13. Какой заряд будет на обкладках конденсатора, если емкость $C = 2$мкф, $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 7$ Ом, $R_3 = 3$ Ом?

Решение. Источник $\mathcal{E}$ заряжает конденсатор до определенного напряжения U_C. Когда потенциал правой пластины конденсатора будет равен потенциалу точки B, ток через сопротивление R_3 прекратится, но он продолжает идти через сопротивления R_1 и R_2. Напряжение на конденсаторе равно падению напряжения на сопротивлении R_2. Таким образом:

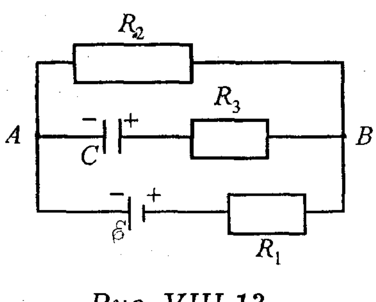


Рис. VIII.13

$$U_c = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3{,}9 \cdot 6}{13} = 1{,}8\,\text{В}.$$

Заряд на конденсаторе определяется формулой

$$Q = U_с C = 1{,}8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 3{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Задача VIII.12 Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на *рис. VIII.14*. ЭДС источника $\mathscr{E}$. Внутренним его сопротивлением пренебречь.

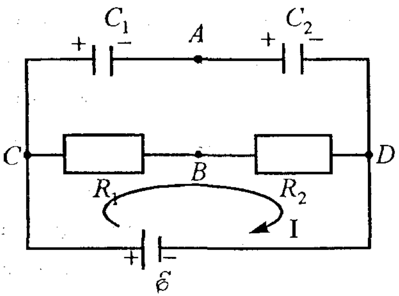


Рис. VIII.14

Решение. Источник ЭДС заряжает конденсаторы до некоторого напряжения U_{c_1} и U_{c_2} до тех пор, пока сумма падений напряжений на конденсаторах не будет равна напряжению на участке CD.

После зарядки конденсаторов ток пойдет только через сопротивления R_1 и R_2, причем этот ток $\quad I = \dfrac{\mathscr{E}_0}{R_1 + R_2}$.

Для определения разности потенциалов между точками A и B достаточно выбрать контур $ABCA$ и обойти его по замкнутому пути. Тогда $\varphi_A - \varphi_B - IR_1 + U_{c_1} = 0$, или $\varphi_A - \varphi_B = IR_1 - U_{c_1}$.

Так как конденсаторы соединены последовательно, то на их обкладках будут одинаковые заряды Q, которые определяются по формуле

$$Q = \mathcal{E}C_{\text{общ}} = \mathcal{E}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2},$$

а напряжения равны

$$U_{c_1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{\mathcal{E}C_2}{C_1+C_2} \text{ и } U_{c_2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{\mathcal{E}C_1}{C_1+C_2}.$$

Поэтому разность потенциалов между точками A и B

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1+R_2} - \frac{\mathcal{E}C_2}{C_1+C_2}.$$

Тот же ответ получится, если выбрать контур $ABDA$.

Задача VIII.13 Определить заряд конденсатора C на схеме, указанной на *рис. VIII.15*. Все элементы заданы. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение. Потенциалы точек A, B, D будем считать относительно точки C (это равносильно тому, что мы потенциал точки C положили равным нулю). Пусть потенциал точки D будет равен φ, тогда потенциал точки A будет $\varphi_A = \mathcal{E}$, а потенциал точки B

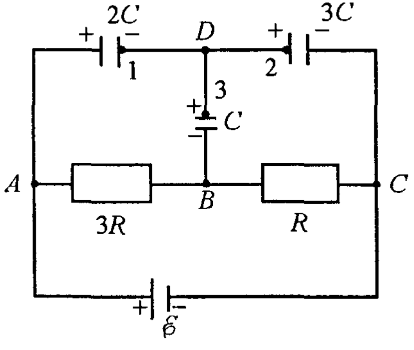


Рис. VIII.15

$$\varphi_B = IR = \frac{\mathcal{E}R}{3R+R} = \frac{\mathcal{E}}{4}.$$

В точке соединения конденсаторов (в точке D) сумма зарядов остается постоянной и равной нулю, так как до зарядки на обкладках конденсаторов заряд отсутствовал. При зарядке конденсаторов заряды на обкладках 1, 2, 3 как-то перераспределяются, но убежать они никуда не могут, поэтому их сумма останется равной нулю. Пусть конденсаторы зарядились, как показано на рисунке, тогда $-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, или

$$-2C(\varphi_A - \varphi) + 3C\varphi + C(\varphi - \varphi_B) = 0.$$

Подставив значения найденных потенциалов φ_A и φ_B, получим

$$-(\mathcal{E} - \varphi)2C + \varphi 3C + \left(\varphi - \frac{\mathcal{E}}{4}\right)C = 0.$$

Отсюда определим потенциал φ: $\varphi = {}^3\!/_8\,\mathcal{E}$.

Заряд на конденсаторе C

$$Q = (\varphi_D - \varphi_B)\cdot C = \left(\frac{3\mathcal{E}}{8} - \frac{\mathcal{E}}{4}\right)C = \frac{\mathcal{E}C}{8}.$$

Задача VIII.14 Железная проволока имеет сопротивление в два раза больше, чем медная. В какой из проволок выделится большее количество тепла при включении обеих проволок в цепь с постоянным напряжением: а) последовательно, б) параллельно?

Решение. При последовательном соединении проводников через них протекает один и тот же ток, поэтому

$$\frac{Q_ж}{Q_м} = \frac{I^2 R_ж \Delta t}{I^2 R_м \Delta t} = \frac{R_ж}{R_м}.$$

Так как $R_ж > R_м$, то и $Q_ж > Q_м$.

При параллельном включении проволок напряжение на проводниках одинаковое, поэтому

$$\frac{Q_ж}{Q_м} = \frac{{U^2}/{R_ж}\,\Delta t}{{U^2}/{R_м}\,\Delta t} = \frac{R_м}{R_ж}.$$

Следовательно $Q_м > Q_ж$.

Таким образом, при последовательном включении проволок на железной выделится в два раза тепла больше, чем на медной, а при параллельном – наоборот.

Задача VIII.15 Какое сопротивление R должно быть включено последовательно с лампой, чтобы лампа горела нормальным накалом при напряжении $V = 220\text{В}$, если лампа рассчитана на напряжение $V_0 = 120\text{В}$ при мощности $N = 60\text{Вт}$?

Решение. Лампа будет гореть нормальным накалом, если через нее будет протекать ток, на который она рассчитана. Но для этого вначале нужно рассчитать сопротивление лампы $R_л$. Это легко сделать, воспользовавшись формулой

$$N = I^2 R_л = \frac{U^2}{R_л}. \quad (1)$$

Откуда

$$R_л = \frac{U^2}{N} = \frac{14400}{60} = 240 \text{ Ом}. \qquad (2)$$

Тогда ток I определится из уравнения (1):

$$I = \sqrt{\frac{N}{R_л}} = \sqrt{\frac{60\text{Вт}}{240 \text{ Ом}}} = \frac{1}{2}\text{А}.$$

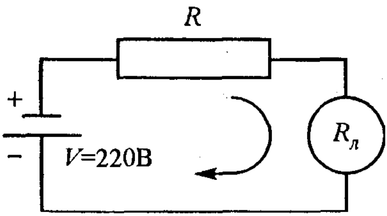


Рис. VIII.16

Схему включения лампы и сопротивления R можно представить на *рис. VIII.16*, причем в лампе должен протекать ток, необходимый для нормального накала лампы (I = 0,5А).

Так как лампа рассчитана на напряжение V_0 = 120В, то на сопротивлении R должно падать напряжение $U = V - V_0$ (*рис. VIII.16*).

Тогда сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{V - V_0}{I} = \frac{100\text{В}}{0{,}5\text{А}} = 200 \text{ Ом}.$$

Задача VIII.16 Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Выразить мощность тока N во внешней цепи как функцию тока I.

Построить графики изменения силы тока I, напряжения U, мощности N и кпд η при изменении сопротивления реостата R.

При каком соотношении внешнего и внутреннего сопротивлений достигается максимальная мощность во внешней цепи? Каков при этом кпд установки η (*рис. VIII.17, а,б,в,г,д*)?

Решение. Мощность, развиваемая источником $\mathcal{E}$, идет на выделение джоулева тепла как на нагрузочном сопротивлении R (в нашем случае реостат), так и на внутреннем сопротивлении источника r, т. е.

$$\mathcal{E}I = N + I^2r\text{, или } N = \mathcal{E}I - I^2r\,.$$

Зависимость выделяемой мощности на нагрузке от тока представляет собой параболу (*рис. VIII.17, а*). Каждому значению мощности соответствуют два значения тока. При токе $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2r}$ мощность, выделяемая на нагрузке — максимальна. Это легко получить, исследуя функцию

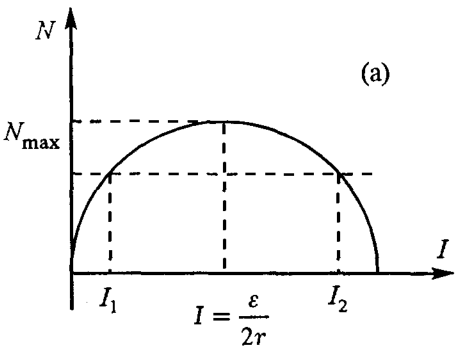


Рис. VIII.17

$N = \mathcal{E}I - I^2r$ на экстремум: берем производную по току от выше приведенного выражения и приравниваем к нулю: $(\mathcal{E} - 2Ir = 0)$. Таким образом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

Зависимость силы тока I от сопротивления определяется по формуле

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (1)$$

Графически эта зависимость представлена на *рис. VIII.17, б.* Зависимость напряжения U от сопротивления определяется формулой

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + r} = \frac{\mathcal{E}}{1 + r/R}. \qquad (2)$$

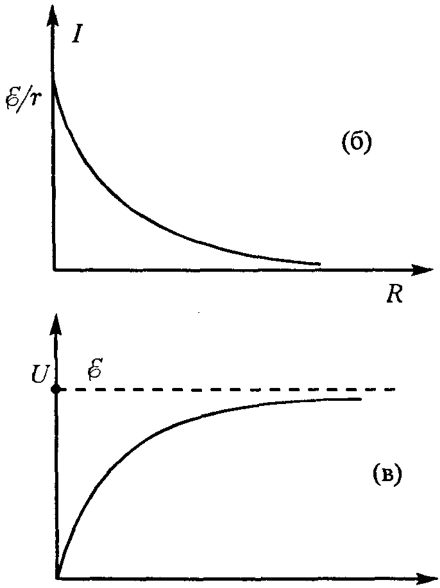


Рис. VIII.17

График этой зависимости изображен на *рис. VIII.17, (в).* Мощность, развиваемая на сопротивлении R (*рис. VIII.17, г*), равна

$$N = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}, \qquad (3)$$

а полная мощность

$$N_0 = I^2 \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}}{R+r} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}. \qquad (4)$$

Максимальное значение мощности соответствует току: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{2r}$.

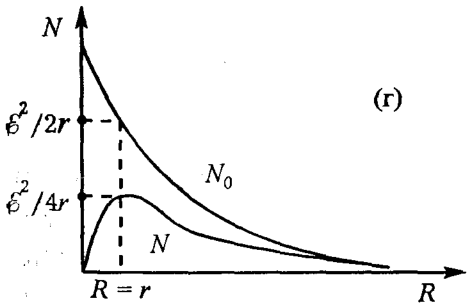


Рис. VIII.17

Это означает, что сопротивление нагрузки R должно быть равно r, что следует из формулы (4). Именно при равенстве внутреннего сопротивления и сопротивления нагрузки выделяется максимальная мощность в нагрузке.

Коэффициент полезного действия η по определению равен $\eta = \dfrac{N_{\text{полез}}}{N_{\text{полн}}}$. В нашей задаче полезной мощностью является мощность, выделенная на нагрузке R. Она равна: $N_{\text{полез}} = \mathcal{E}I - Ir$, тогда кпд

$$\eta = \frac{\mathcal{E}I - Ir}{I\mathcal{E}} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{\mathcal{E}r}{(R+r)/\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}. \quad (5)$$

Таким образом, при максимальной потребляемой мощности $(R = r)$ кпд $\eta = 1/2$ (*рис. VIII.17, д*).

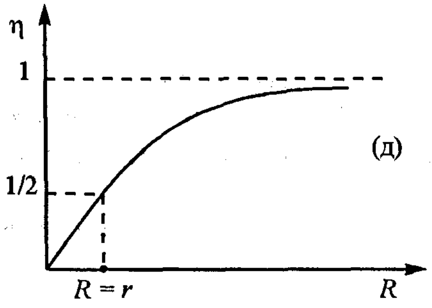


Рис. VIII.17

Задача VIII.17 Аккумулятор подключен к сети зарядной станции с напряжением $V_0 = 13$В. Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0{,}4$ Ом, его остаточная ЭДС $\mathcal{E} = 11$ В. Какую мощность N_0 расходует станция на зарядку аккумулятора? Какая часть n этой мощности расходуется на нагревание аккумулятора (*рис. VIII.18*)?

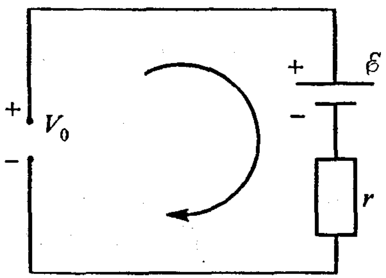


Рис. VIII.18

Решение. Для зарядки аккумулятор всегда включается навстречу напряжению зарядной станции (см. рисунок). Ток идет в направлении, противоположном направлению действия ЭДС $\mathcal{E}$, и определяется из закона Ома:

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{r} = \frac{13 - 11}{0{,}4} = 5\,\text{А}.$$

Мощность, расходуемая зарядной станцией:

$$N_0 = IV_0 = 65\,\text{Вт}.$$

Мощность, расходуемая на нагревание аккумулятора:

$$N_1 = I^2 r = 10\text{Вт}.$$

Таким образом:

$$n = \frac{N_1}{N_0} = \frac{2}{13},\ \text{или}\ 15{,}6\%.$$

Задача VIII.18 Электромотор с сопротивлением r приводится в движение от сети с напряжением V_0. Мотор потребляет ток силой I_0. Какую мощность N_0 потребляет мотор? Какая часть этой мощности превращается в механическую энергию?

Решение. Мотор потребляет мощность $N_0 = I_0 V_0$, причем эта мощность идет на механическое вращение мотора N_1 и на нагревание его обмоток, т. е.

$$N_0 = I_0 V_0 = N_1 + I_0^2 r.$$

Следовательно, мощность, идущая на вращение мотора:

$$N_1 = N_0 - I_0^2 r = I_0 (V_0 - I_0 r).$$

Эта мощность составляет $n = \dfrac{I_0 (V_0 - I_0 r)}{I_0 V_0}$ часть от полной мощности.

Задача VIII.20 Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1 = 15$ мин, при включении другой – через $t_2 = 30$ мин. Через какое время t закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно, б) параллельно.

Решение. При любом соединении сопротивлений чайнику для закипания необходимо сообщить одно и то же количество теплоты $Q = cm\Delta T$, так как c, m, ΔT остаются неизменными. Поэтому можно записать

$$Q = \frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{R_2}t_2. \qquad (1)$$

(Эту формулу удобно взять потому, что всякий раз чайник включается в одну и ту же розетку.) Таким образом:

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2}, \text{ или } \frac{R_2}{R_1} = \frac{t_2}{t_1} = 2, \text{ т. е. } R_2 = 2R_1.$$

При последовательном включении обмоток общее сопротивление $R_{общ} = R_1 + R_2$. Применяя формулу (1) для последовательного включения обмоток, получим

$$\frac{U^2}{R_1 + R_2}t_x = \frac{U^2}{R_1}t_1, \text{ или}$$

$$t_x = \frac{R_1 + R_2}{R_1}t_1 = \frac{R_1 + 2R_1}{R_1}t_1 = 3t_1 = 45\,\text{мин}.$$

При параллельном включении обмоток $R_{общ} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$. Опять, воспользовавшись формулой (1), имеем

$$\frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} t_y = \frac{U^2 t_1}{R_1}, \text{ или}$$

$$t_y = t_1 \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} = \frac{2}{3} t_1 = 10 \text{ мин}.$$

Задача VIII.21 Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение $U_0 = 220$В, требуется переделать, не меняя и не укорачивая спирали, на $U_1 = 110$В так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно для этого сделать (*рис. VIII.19*)?

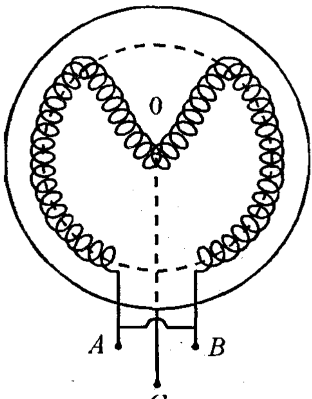


Рис. VIII.19

Решение. Так как в условии задачи заданы напряжения, при которых должна работать плитка, то воспользуемся выражением для мощности в виде

$$N = \frac{U^2}{R}.$$

Так как напряжение уменьшилось в два раза, то, чтобы мощность осталась прежней, новое сопротивление плитки должно уменьшиться в четыре раза, действительно:

$$\frac{U_0^2}{R} = \frac{U_1^2}{R_x}, \text{ отсюда}$$

$$R_x = \frac{U_1^2 R}{U_0^2} = \frac{R}{4}.$$

Так как спираль нельзя менять и укорачивать, то от центра спирали (точка 0 на *рис. VIII.19*) нужно сделать отвод C, а полученные два сопротивления $0A$ и $0B$ соединить параллельно, тогда мы имеем

$$R_x = \frac{R/2 \cdot R/2}{R/2 + R/2} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}.$$

IX. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

пIX.1 Вокруг проводников с током, так же как и вокруг постоянных магнитов, существует магнитное поле, которое характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$.

Магнитное поле в каждой точке пространства имеет определенное направление, зависящее от направления тока, создающего это поле, и от среды, в которой находится проводник.

Магнитное поле, созданное каждым элементом тока длиной Δl, определяется формулой Био Савар Лапласа:

$$\vec{B}_i = \frac{\mu\mu_0 I \left[\vec{\Delta l}\,\vec{r}\right]}{4\pi\vec{r}^3}, \text{ или } \left|\vec{B}_i\right| = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin\alpha}{4\pi r^2},$$