нулю, т.е. $\frac{b}{x} = 2m$. Тогда $b = 2mx = \frac{2m\lambda}{2\sin\varphi}$, или

$b\sin\varphi = m\lambda$, отсюда

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{b}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \ldots$$

XI. ЗАДАЧИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЕ В 1994–1996 гг. НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В этой главе разбираются задачи, предложенные в 1994–1996 гг. на вступительных экзаменах в Московском государственном университете на факультетах: геологическом, физическом, химическом, механико-математическом и факультете ВМиК.

Следует отметить, что существуют несколько способов решения задач, однако из всех возможных способов абитуриенты должны выбирать более короткий и простой способ, поскольку им нужно показать свою эрудицию, свои знания, которые были накоплены за годы обучения в школе.

Задача XI.1 С вершины горы бросили камень со скоростью v_0 под углом к горизонту. В момент падения угол между скоростью камня и горизонтом β, а разность высот точек бросания и падения Δh. Определить угол α между скоростью $\vec{v}_0$ и горизонтом (*рис. XI.1*).

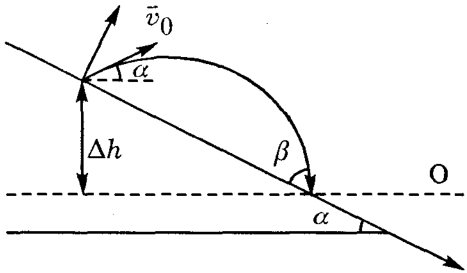


Рис. XI.1

Решение. Эту задачу проще всего решить, если воспользоваться законом сохранения механической энергии. Система: камень — Земля, является замкнутой, и силы, которые в ней действуют, — консервативные. Поэтому можно применить закон сохранения механической энергии.

За начальный уровень отсчета выберем горизонтальную прямую, проходящую через точку падения камня. Тогда закон сохранения механической энергии запишется

$$mg\Delta h + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость камня при падении.

Она легко определяется.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}.$$

Так как на камень действует только сила тяжести, направленная вертикально, то горизонтальная составляющая скорости камня не меняет своей величины, т. е.

$$v_0 \cos\alpha = v\cos\beta ,$$

таким образом:

$$\cos\alpha = \frac{v}{v_0}\cos\beta = \cos\beta\sqrt{1+\frac{2g\Delta h}{v_0^2}} ;$$

$$\alpha = \arccos\left(\cos\beta\sqrt{1+\frac{2g\Delta h}{v_0^2}}\right).$$

Задача XI.2 Катер, движущийся со скоростью $v_К = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах. Стальной трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150^\circ$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60^\circ$. Определить скорость спортсмена в этот момент времени (*рис. XI.2*).

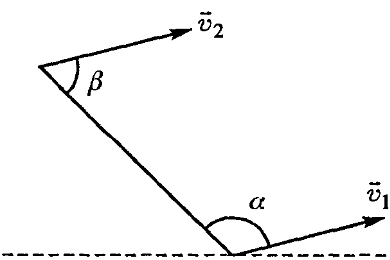


Рис. XI.2

Решение. Так как трос стальной, а значит, нерастяжимый, то проекции скоростей спортсмена и катера на направление троса должны быть одинаковыми, т. е.

$$v_с \cos\beta = v_к \cos\left(180^\circ - \alpha\right);$$

$$v_с = \frac{v_к \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = v\sqrt{3} = 52 \text{ км/ч}.$$

Задача XI.3 Нарушитель промчался мимо поста ГАИ на автомобиле со скоростью $v_1 = 108$ км/ч. Спустя $t_1 = 20$ с вслед за ним отправился на мотоцикле инспектор ГАИ и, разгоняясь в течение $t_2 = 40$ с, набрал скорость $v_2 = 144$ км/ч. На каком расстоянии S от поста ГАИ инспектор догонит нарушителя, если инспектор после разгона движется со скоростью v_2?

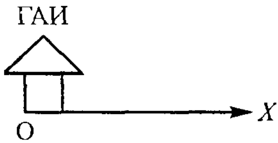


Рис. XI.3

Решение. Начало координат свяжем с местом расположения ГАИ (*рис. XI.3*). Тогда координата нарушителя, движущегося с постоянной скоростью v_1,

$$x_{\text{н}} = v_1(t_1 + t_2 + t),$$

где t — время, в течение которого инспектор двигался за автомобилем с постоянной скоростью v_2.

Координата инспектора

$$x_{\text{и}} = \frac{at_2^2}{2} + v_2 t.$$

В момент, когда инспектор догонит нарушителя, их координаты будут одинаковы, т.е.

$$x_{\text{н}} = x_{\text{и}}, \text{ или } v_1(t_1 + t_2 + t) = \frac{at_2^2}{2} + v_2 t.$$

Так как $v_2 = at_2$, то

$$v_1(t_1 + t_2 + t) = \frac{v_2 t_2}{2} + v_2 t.$$

Отсюда

$$t = \frac{v_1(t_1 + t_2) - \dfrac{v_2 t_2}{2}}{v_2 - v_1} = 100\,\text{с}.$$

Через $t = 100$ с инспектор догонит нарушителя, при этом они оба будут находиться на расстоянии S от ГАИ.

$$S = x_{\text{Н}} = x_{\text{И}} = \frac{v_1 v_2 (2t_1 + t_2)}{2(v_2 - v_1)} = 1728\,\text{м}.$$

Задача XI.4 На горизонтальном столе лежат два бруска, связанные невесомой и нерастяжимой нитью. Нить расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центры брусков, и образует с горизонтом угол α. К правому бруску массой M приложена горизонтальная сила F, проходящая через центр тяжести бруска. Определить силу натяжения T нити при движении брусков, если коэффициент трения брусков о стол равен u. Масса второго бруска равна m (*рис. XI.4*).

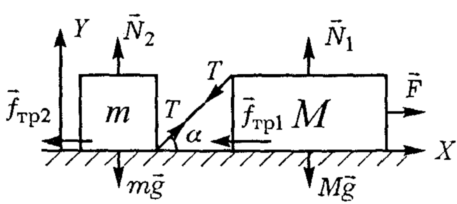


Рис. XI.4

Решение. Нарисуем стрелочками все силы, действующие на оба бруска, и запишем второй закон Ньютона в проекции на ось $0X$ для каждого бруска

$$F - f_{тр1} - T\cos\alpha = Ma, \qquad (1)$$

где $f_{тр1} = \mu N_1$.

$$T\cos\alpha - f_{тр2} = ma, \qquad (2)$$

где $f_{тр2} = \mu N_2$.

N_1 и N_2 можно определить из уравнений Ньютона, записанных вдоль оси $0Y$:

$N_1 - T\sin\alpha - Mg = 0$, отсюда $N_1 = Mg + T\sin\alpha$

$N_2 + T\sin\alpha - mg = 0$, отсюда $N_2 = mg - T\sin\alpha$.

Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$F - \mu(M+m)g = (M+m)a. \qquad (3)$$

Следует отметить, что уравнения (1), (2) и (3) справедливы, если $F > \mu(M+m)g$.

Из уравнения (3) видно, что оба бруска движутся с ускорением

$$a = \frac{F - \mu(M+m)g}{M+m},$$

а сила натяжения T меняется по закону

$$T = \frac{Fm}{(M+m)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}.$$

Задача XI.5 На идеально гладком столе находится клин массой $M = 1$ кг с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. На гладкий клин кладут брусок массой $m = 2$

кг. Под каким углом β соскользнет брусок с поверхности клина (*рис. XI.5*)?

Решение. Рассмотрим систему тел: клин — брусок. Для этой системы тел вдоль горизонтального направления выполняется закон сохранения импульса (силы N и N' являются внутренними). Как только брусок начнет двигаться вдоль наклонной плоскости, клин поедет влево с некоторой скоростью u. В любой момент времени выполняется закон сохранения импульса:

$$0 = mv_г - Mu\text{, или } u = \frac{mv_г}{M}, \qquad (1)$$

где $v_г$ — горизонтальная составляющая бруска относительно Земли.

Так как клин ускользает из-под бруска, то брусок соскользнет с поверхности клина со скоростью v под углом β, бо́льшим, чем угол α, причем

$$\text{tg } \beta = \frac{v_в}{v_г}, \qquad (2)$$

где $v_в$ — вертикальная составляющая скорости бруска.

Относительно клина в горизонтальном направлении (*рис. XI.5, а*) скорость бруска

$v_{x\text{ отн}} = v_г - (-u) = v_г + u$, тогда

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_в}{v_г + u}. \qquad (3)$$

Это условие пребывания бруска на поверхности клина.

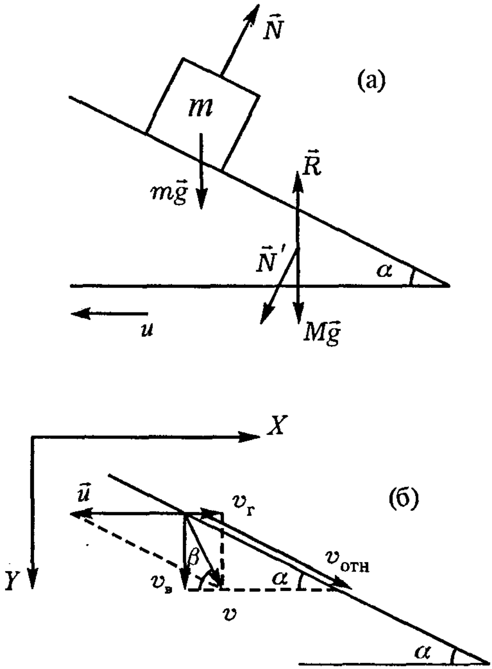


Рис. XI.5

Разделив числитель и знаменатель правой части уравнения (3) на $v_г$, получим

$$\operatorname{tg}\ \alpha = \frac{v_в / v_г}{1 + u / v_г} = \frac{\operatorname{tg}\ \beta}{1 + m/M}, \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}\ \beta = \operatorname{tg}\ \alpha \frac{(M + m)}{m}.$$

Из этого соотношения следует, что $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg}\ \alpha$.

Задача XI.6 Кирпич, лежащий на краю крыши дома, толкнули вверх вдоль ската со скоростью $v = 10$ м/с. После упругого удара о конек кирпич соскользнул обратно и остановился на краю крыши. Определить коэффициент трения u между кирпичем и поверхностью крыши, если конек находится на высоте $h = 2{,}5$ м от края крыши. Угол наклона крыши к горизонту $\alpha = 30°$ (*рис. XI.6*).

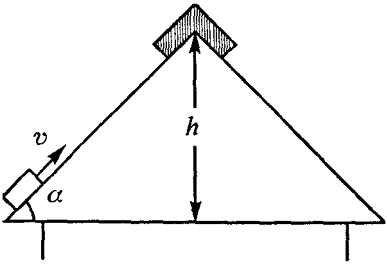


Рис. XI.6

Решение. Задача становится очень простой, если воспользоваться законом изменения механической энергии.

Вся кинетическая энергия, сообщенная кирпичу, пошла на работу против сил трения, т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = 2f_{\text{тр}}l = 2\mu\frac{mgh\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\mu mgh}{\operatorname{tg}\ \alpha}.$$

Отсюда коэффициент трения

$$\mu = \frac{v^2 \operatorname{tg}\ \alpha}{4gh} = \frac{10^2\cdot 1}{4\cdot 9{,}8\cdot\sqrt{3}} = 1{,}47\,.$$

Задача XI.7 К деревянному кубу массой M, лежащему на плоской горизонтальной поверхности, прикреплена невесомая пружина жесткостью k. Другой конец пружины закреплен. В куб попада-

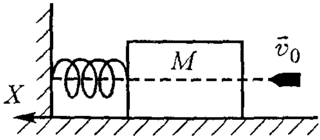


Рис. XI.7

ет пуля массой m и застревает в нем (пуля летит вдоль горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести куба, со скоростью v_0). Определить максимальное смещение куба Δx, если между кубом и горизонтальной поверхностью возникает сила трения. Коэффициент трения μ (*рис. XI.7*).

Решение. После попадания пули она движется с кубом с одинаковой скоростью u. Можно записать закон сохранения импульса

$$mv_0 = (m+M)u\,,$$

где u – скорость сразу после удара.

Кинетическая энергия, которую приобрел куб сразу после удара, пошла на преодоление работы против сил трения и на сжатие пружины (сообщение ей потенциальной энергии). Поэтому можно записать:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = A_{\text{тр}} + \frac{k\Delta x^2}{2} = \mu(m+M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Учитывая, что $u = \dfrac{mv_0}{(m+M)}$, получим

$$\frac{m_0 v_0^2}{2(m+M)} = \mu(m+M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}, \text{ или}$$

$$\Delta x^2 + \frac{2\mu}{k}(m+M)g\Delta x - \frac{m_0 v_0^2}{k(m+M)} = 0.$$

Отсюда

$$\Delta x = -\frac{\mu}{k}(m+M)g + \sqrt{\left[\frac{\mu}{k}(m+M)g\right]^2 + \frac{m_0 v_0^2}{k(m+M)}}.$$

Физический смысл имеет только знак «+» перед корнем, так как знак «−» означает не сжатие, а расширение пружины.

Задача XI.8 В середину чаши массой M, прикрепленной снизу к вертикальной пружине жесткостью k (*рис. XI.8*), попадает падающий с высоты H пластилиновый шарик массой m. На какую максимальную величину Δx отклонится вниз чаша в процессе колебания после попадания в нее шарика?

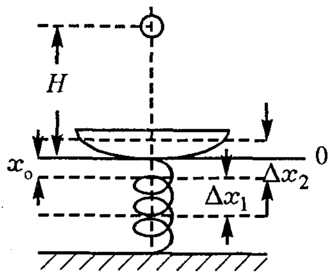


Рис. XI.8

Решение. Непосредственно перед попаданием шарика в чашу можно применить закон сохранения механической энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2}, \text{ отсюда } v^2 = 2gH.$$

В момент удара выделяется некоторое количество тепла. Поэтому закон сохранения механической энергии применять уже нельзя, но можно использовать закон сохранения импульса. Чаша с шариком начнет двигаться вниз с некоторой скоростью u, которую определяем из закона сохранения импульса:

$$mv = (m+M)u, \text{ или } u = \frac{mv}{m+M}.$$

При максимальном сжатии пружины на Δx кинетическая энергия чаши с шариком переходит в потенциальную энергию сжатой пружины и новую потенциальную энергию чаши с шариком, т. е.

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)g\Delta x + \frac{k\Delta x^2}{2}.$$

Из этого уравнения следует

$$\Delta x_{12} = -\frac{(m+M)g}{k} \pm \sqrt{\left[\frac{(m+M)g}{k}\right]^2 + \frac{(m+M)u^2}{k}} =$$

$$= -\frac{(m+M)g}{k} \pm \sqrt{\frac{(m+M)^2 g^2}{k^2} + \frac{m^2 2gH}{k(m+M)}}.$$

Следует отметить, что чаша с шариком имеет новое положение равновесия (x_0), которое определяется вторым законом Ньютона и отсчитывается от начального нулевого уровня (см. рис. XI.8).

$$(m+M)g - kx_0 = 0.$$

Отсюда $x_0 = \dfrac{m+M}{k}g$. Около этого положения равновесия будет колебаться чаша с шариком.

С другой стороны: $x_0 = \dfrac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2}$ (см. рис.).

Амплитуда этого колебания

$$A = \Delta x_2 - x_0 = |\Delta x_1 - x_0| = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{2} \text{ (см. рис.)}.$$

Таким образом:

$$A = \sqrt{\frac{(m+M)^2 g^2}{k^2} + \frac{2gHm^2}{k(m+M)}}.$$

Задача XI.9 Космический корабль движется по круговой орбите радиусом $R = 4000$ км вокруг неизвестной планеты. Определить ускорение свободного падения на поверхности планеты $g_п$, если ее радиус $r_0 = 3500$ км, а период обращения корабля $T = 2$ ч.

Решение. На корабль действует единственная сила – сила гравитации. Поэтому второй закон Ньютона запишется

$$G\frac{Mm}{R^2} = ma_n = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R, \qquad (1)$$

где M и m – массы планеты и корабля соответственно.

Так как ускорение свободного падения у планеты $g_п = G\frac{M}{r_0^2}$, то уравнение (1) можно переписать

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = g_п\frac{r_0 m}{R^2}, \text{ отсюда}$$

$$g_п = \frac{4\pi^2 R^3}{r_0^2 T^2} = 3{,}9\,\text{м/с}.$$

Задача XI.10 На отрезок тонкостенной трубы симметрично намотаны две невесомые нерастяжимые нити. Труба удерживается в положении, указанном на рисунке. В некоторый момент времени трубу отпускают. Она опускается, разматывая нить. Определить ускорение осевой линии трубы (*рис. XI.9*), проходящей через точку A.

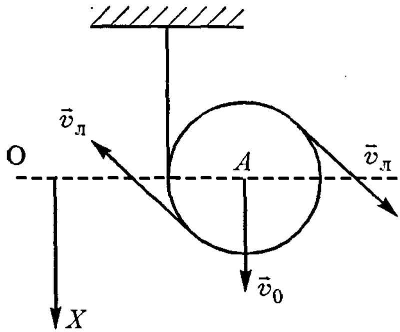


Рис. XI.9

Решение. Все точки трубы одновременно участвуют в двух движениях: в поступательном со скоростью центра тяжести трубы v_0 и во вращательном – с линейной скоростью $v_л$, при этом эти скорости равны по величине (катушка не проскальзывает), т. е. $v_0 = v_л$.

Кинетическая энергия тонкостенной трубы $E_к = Mv_0^2$ (см. решение задачи IV.13).

Из закона сохранения механической энергии следует

$$\Delta E_{мех} = \Delta E_к + \Delta E_п = 0 \ .$$

Для указанной на рисунке системы координат это уравнение запишется

$$-Mv_0^2 + Mg\Delta x = 0\text{, или } Mv_0^2 = Mg\Delta x. \qquad (1)$$

Используя уравнение кинематики

$$\Delta x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (2)$$

и уравнение (1), получим, $t = {}^{2v_0}\!/_{g}$.

Искомое ускорение центра тяжести трубы a получаем с помощью уравнения (2):

$$a = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{{}^{2v_0^2}\!/_{g}}{{}^{4v_0^2}\!/_{g^2}} = \frac{g}{2}.$$

Задача XI.11 Верхний конец невесомой пружины жесткостью k с начальной длиной l_0 прикреплен к опоре. На нижнем конце пружины висит грузик массой m. Пружину растянули до длины l и отклонили на угол α от вертикали, а затем грузик отпускают без начальной скорости (*рис. XI.10*). Какое количество тепла выделится в этой системе после затухания всех колебаний?

Решение. В положении равновесия пружина с грузом имеет длину l_1, которую можно определить из уравнения

$$k(l_1 - l_0) = mg\text{, или } l_1 = \frac{mg + kl_0}{k}.$$

Растянув пружину до длины l и отклонив ее от вертикали на угол α, ей сообщили некоторый запас потенциальной энергии.

$$E_{п1} = \frac{k}{2}\left(l - l_0\right)^2.$$

После всех колебаний пружина вернется в вертикальное положение, где запас ее потенциальной энергии станет равным

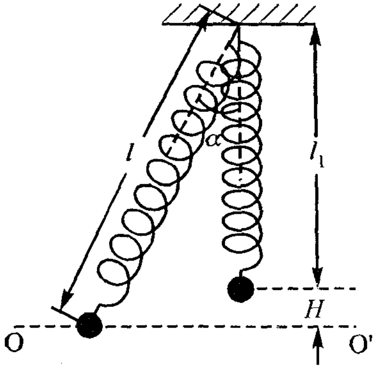


Рис. XI.10

$$E_{п2} = mgH + \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0\right)^2.$$

Начальный уровень отсчета потенциальной энергии совмещаем с горизонталью O O′ (*рис. XI.10*), H — высота конечного положения грузика после всех колебаний. Разность этих энергий и будет тем количеством тепла Q, которое выделится в системе после всех колебаний, т. е.

$$Q = E_{п1} - E_{п2}.$$

Высоту H можно определить из рисунка:

$$H = l\cos\alpha - l_1 = l\cos\alpha - \frac{mg + kl_0}{k},$$

тогда

$$Q = \frac{k}{2}\left(l - l_0\right)^2 - mg\left(l\cos\alpha - l_0 - \frac{mg}{k}\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{mg + kl_0}{k} - l_0\right)^2 =$$

$$= \frac{k}{2}\left(l - l_0\right)^2 + \frac{m^2g^2}{2k} - mg\left(l\cos\alpha - l_0\right).$$

Задача XI.12 Над серединой большого цилиндрического сосуда площадью S и высотой H = 60 см закреплен маленький цилиндрический сосуд с площадью сечения $s = 0{,}2S$. В верхнем сосуде находится ртуть, причем высота ее уровня над уровнем нижнего сосуда h = 1,5 м (*рис. XI.11*). Через отверстие в середине дна маленького сосуда ртуть выливается в большой сосуд. Определить изменение температуры ртути Δt, если ее удельная теплоемкость с = 0,12 кДж/кгК. Теплоемкостью сосудов и рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь. Ускорение свободного падения g принять равным g = 10 м/с^2.

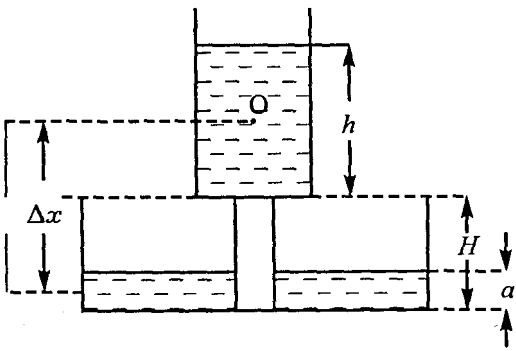


Рис. XI.11

Решение. Центр тяжести ртути после вытекания переместится на Δx (*рис. XI.11*), поэтому изменение потенциальной энергии

$$\Delta E_п = mg\Delta x = mg\left(H + \frac{h}{2}\right) - mg\frac{a}{2}.$$

Положение нового центра тяжести ртути $\left(\frac{a}{2}\right)$ определяется из условия постоянства объема ртути, т. е.

$$0{,}2Sh = Sa, \quad \text{или} \quad a = 0{,}2h.$$

Таким образом, $\Delta E_{\text{п}} = mg(H + 0{,}4h)$. При падении ртути происходит неупругий удар и выделяется некоторое количество тепла ΔQ, которое идет на нагревание ртути, при этом $\Delta E_{\text{п}} = \Delta Q = cm\Delta t$. Следовательно:

$$\Delta t = \frac{\Delta E_{\text{п}}}{cm} = \frac{mg(H + 0{,}4h)}{cm} = \frac{g}{c}(H + 0{,}4h) = 0{,}1^\circ\ \text{C}.$$

Задача XI.13 Ящик массой m с постоянной скоростью втягивают за веревку на горку. Когда ящик подняли на высоту h, совершив работу A, веревка оборвалась и ящик стал скользить вниз. Какую скорость v будет иметь ящик, опустившись до исходного положения? Коэффициент трения ящика о горку считать постоянным (*рис. XI.12*).

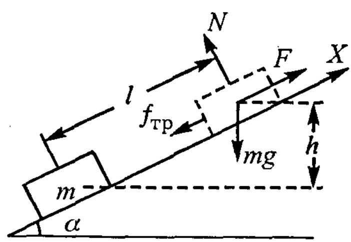


Рис. XI.12

Решение. Силы, действующие на ящик, изображены на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось $0X$ и определим неизвестную силу F:

$$-mg\sin\alpha + F - f_{\text{тр}} = 0\ ,$$

тогда

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha.$$

Сила F для системы тел: горка — ящик, является внешней силой. Она совершает работу A, которая идет на преодоление силы трения $f_{тр}$ и сообщение ящику потенциальной энергии, т. е.

$$A = Fl = mgh + f_{тр}l = mgh + \mu mg\frac{\cos\alpha \cdot h}{\sin\alpha}, \quad (1)$$

где l — длина пройденного ящиком пути до обрыва веревки.

При движении ящика вниз из закона сохранения механической энергии следует,

$$\Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{f_{тр}}, \text{ или } \frac{mv^2}{2} - mgh = -f_{тр}l, \text{ т.е.}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh - \mu mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$A + \frac{mv^2}{2} = 2mgh, \text{ отсюда } v^2 = 4gh - \frac{2A}{m},$$

или $v = \sqrt{4gh - \dfrac{2A}{m}}$.

Задача XI.14 Надувной шарик, заполненный гелием, удерживают на нити. Найти натяжение нити T, если масса оболочки шарика $m = 2$ г, объем $V = 3$ л, давление гелия $p = 1{,}04 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 27^\circ$. Молярная масса гелия $\mu = 4$ г/моль, плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, универсальная постоянная $R = 8{,}3$ Дж/моль К.

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $(m + m_г)g$, сила натяжения T и сила Архимеда $F_A = \rho g V$ (*рис. XI.13*).

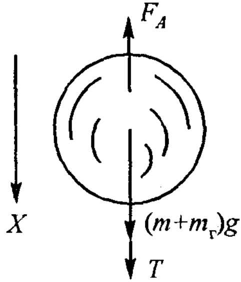


Рис. XI.13

Так как шарик находится в равновесии, то второй закон Ньютона в проекции на ось $0X$ запишется:

$$(m + m_г)g + T - F_A = 0\ ,$$

отсюда $T = F_A - (m + m_г)g$.

Массу гелия можно определить из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m_г}{\mu}RT\ , \text{ или } \ m_г = \frac{pV\mu}{RT}.$$

Таким образом:

$$T = \rho g V - \left(m + \frac{\mu p V}{RT}\right)g \approx 0{,}014 \text{ Н}.$$

Задача XI.15 В полусферический тонкостенный «колокол», плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду. Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает «колокол» и начинает вытекать снизу. Определить массу «колокола» M, если его радиус $R = 10$ см. Плотность воды $\rho = 10^3$кг/м^3 (*рис. XI.14*).

Решение. Заполненный доверху водой «колокол» действует на стол с силой, равной силе тяжести

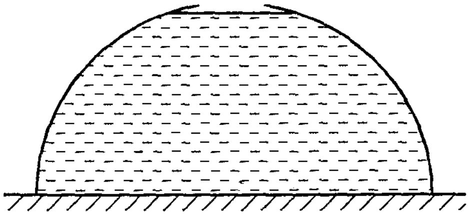


Рис. XI.14

воды и самого «колокола» и направленной вниз.

$$F_1 = Mg + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g.$$

С другой стороны, со стола в момент подтекания воды действует сила

$$F_2 = \rho g h S = \rho g R \pi R^2 = \rho g \pi R^3.$$

Из условия равновесия $F_1 - F_2 = 0$ имеем:

$$Mg + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \rho g \pi R^3, \text{ т. е.}$$

$$M = \frac{\rho g \pi R^3}{3} \approx 10\,\text{кг}.$$

Задача XI.16 В цилиндрический сосуд с водой опускают деревянный шар радиусом R, внутри которого помещен свинцовый грузик массой m. На какую высоту h поднимется уровень воды в сосуде, если площадь его дна S, плотность воды $\rho_в$, плотность дерева $\rho_д$, плотность свинца $\rho_с$?

Решение. В условии задачи ничего не сказано, плавает ли шар с грузиком в воде или он утонул. Поэтому необходимо рассмотреть эти два случая.

I случай: шар с грузиком плавает в воде.

Прежде всего определим массу деревянного шара со свинцовым грузиком

$$M = \rho_д (V_ш - V_с) + m = \rho_д \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{m}{\rho_с} \right) + m. \quad (1)$$

Так как шар плавает, то $Mg = \rho_в V_{выт} g$. (2)

Сравнив уравнения (1) и (2), получим

$$M = \rho_д \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{m}{\rho_с} \right) + m \le \rho_в \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отсюда следует, что свинцовый грузик должен иметь массу

$$m \le \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho_в - \rho_д}{\rho_с - \rho_д} \rho_с = m_0.$$

Теперь определим объем вытесненной воды:

$$V_{выт} = \frac{M}{\rho_в} = \frac{1}{\rho_в} \left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_д + m \left(1 - \frac{\rho_д}{\rho_с} \right) \right],$$

и высоту h_1, на которую поднимется уровень воды в сосуде

$$h_1 = \frac{V_{выт}}{S} = \frac{1}{S\rho_в} \left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_д + m \left(1 - \frac{\rho_д}{\rho_с} \right) \right].$$

II случай: шар с грузиком утонул ($m > m_0$).

В этом случае он вытесняет объем

$$V'_{\text{выт}} = V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

тогда уровень воды в сосуде поднимется на высоту h_2:

$$h_2 = \frac{V'_{\text{выт}}}{S} = \frac{4\pi R^3}{3S}.$$

Задача XI.17 В U-образную трубку налили жидкость массой m. Определить период колебаний жидкости в трубке, возбуждаемых небольшим смещением уровней в коленах от положения равновесия. Площадь вертикальных колен трубки $-S$, плотность жидкости ρ. Трением жидкости о стенки трубки пренебречь (*рис. XI.15*).

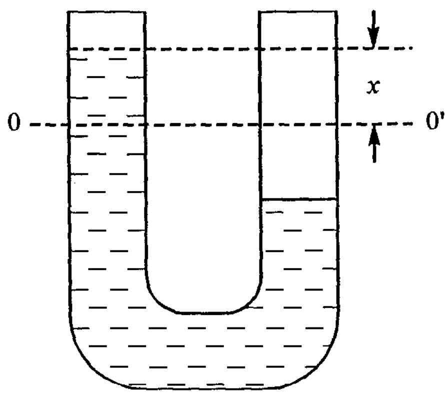


Рис. XI.15

Решение. При смещении уровня жидкости из положения равновесия $0 - 0'$ на величину x возникает разность сил давления, которая заставляет жидкость возвращаться в первоначальное положение.

Уравнение движения запишется:

$$F = ma, \text{ или } -2\rho gxS = ma = mx''. \qquad (1)$$

Как видно, уравнение (1) – это уравнение гармонических колебаний вида

$$x'' = -\omega^2 x, \text{ где } \omega^2 = \frac{2\rho gS}{m},$$

а искомый период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2m}{\rho gS}}.$$

Задача XI.18 В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды m_1 = 500 г и льда m_2 = 500 г при температуре t = 0° С. В сосуд вводится сухой насыщенный пар массой $m_3 = 80$ г при температуре $t_2 = 100°$ С. Какой будет температура t_c после установления теплового равновесия? Удельная теплота парообразования воды r = 2,3 МДж/кг, удельная теплота плавления льда λ = 0б33 МДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4б2 кДж/кг К.

Решение. Введенный в сосуд пар отдает свое тепло, сначала превращаясь в воду при $t_2 = 100°$ С, а затем охлаждаясь на Δt от 100° С до 0° С. При этом выделится тепла

$$Q_1 = m_3 r + m_3 c\Delta t = 21{,}76 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 2{,}176 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Для того чтобы расплавить лед, нужно количество тепла

$$Q_2 = m_2\lambda = 500\,\text{г} \cdot 0.33\,\text{МДж/кг} = 1.65 \cdot 10^5\ \text{Дж}\,.$$

Как видно из подсчетов, $Q_1 > Q_2$, т. е. выделенного паром тепла хватит для того, чтобы весь лед растаял. Количество тепла $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ пойдет на нагревание воды (m_1), растаявшего льда (m_2) и пара, превратившегося в воду, (m_3) до некоторой температуры смеси $t_\text{с}$. Определим ее из уравнения теплового баланса:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i \Delta t_i = Q_1 - Q_2\,;$$

$$cm_1 t_\text{с} + cm_2 t_\text{с} + cm_3 t_\text{с} = Q_1 - Q_2;$$

$$t_c = \frac{Q_1 - Q_2}{c(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{0{,}52 \cdot 10^5}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot (1080) \cdot 10^{-3}} \approx 11{,}5^\circ\ \text{С}.$$

Задача XI.19 Сосуд содержит $m = 1{,}28$ г гелия при температуре $t = 27^\circ$ С. Во сколько раз (n) изменится среднеквадратичная скорость молекул гелия, если при его адиабатическом сжатии совершают работу $A = 252$Дж? Молярная масса гелия $\mu = 4$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/моль К.

Решение. Любой идеальный газ подчиняется объединенному газовому закону. В первоначальном состоянии

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1. \qquad (1)$$

После адиабатического сжатия

$$p_2V_2 = \frac{m}{\mu}R(T_1 + \Delta T), \qquad (2)$$

при этом ΔT можно определить из первого начала термодинамики для адиабатического процесса, т. е.

$\Delta U + A = 0$, так как гелий одноатомный газ, то

$$|\Delta U| = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T \quad \text{(см. пVI.9)}.$$

Таким образом, $\Delta T = \dfrac{2A}{3R}\dfrac{\mu}{m}$.

Поскольку в задаче требуется определить отношение среднеквадратичных скоростей, то поделим уравнение (2) на уравнение (1) и выразим давление p_1 и p_2 через квадраты средних скоростей:

$$p_1 = \frac{1}{3}n_1m\bar{v}_1^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V_1}m\bar{v}_1^2 \quad \text{(см. пVI.3)};$$

$$p_2 = \frac{1}{3}n_2m\bar{v}_2^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V_2}m\bar{v}_2^2,$$

где n_1 и n_2 – концентрации частиц, V_1 и V_2 – объемы гелия, v_1^2 и v_2^2 – квадраты скоростей соответственно до и после сжатия.

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{T + \Delta T}{T} = 1 + \frac{\Delta T}{T}, \text{ или}$$

$$\frac{\overline{v_1^2}}{\overline{v_2^2}} = 1 + \frac{\Delta T}{T} = 1 + \frac{2A\mu}{3RmT}.$$

Следовательно:

$$n = \sqrt{\frac{\overline{v_1^2}}{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{1 + \frac{2A\mu}{3RmT}} = 1{,}1\,.$$

Задача XI.20 Одноатомный идеальный газ переводится из состояния 1 ($p_1 = 130\,\text{кПа}$, $V_1 = 1\text{л}$) в состояние 2 ($p_2 = 10\,\text{кПа}$, $V_2 = 2\text{л}$) по прямой, указанной на *рис. XI.16*. Затем газ переводится в состояние 3 ($p_3 = 20\,\text{кПа}$, $V_3 = 3\text{л}$) по прямой 2–3. Какое количество теплоты ΔQ сообщено газу?

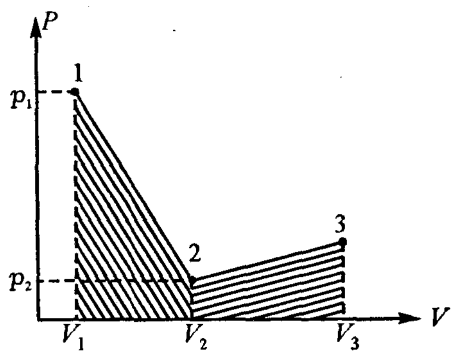


Рис. XI.16

Решение. Количество теплоты определяется из 1-го начала термодинамики:

$\Delta Q = \Delta U + \Delta A$.

Так как газ одноатомный, то изменение его энергии легко определяется при переводе его из состояния 1 в 3 (см. п VI.9)

$$\Delta U = U_3 - U_1 = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_3 - T_1\right).$$

При этом температуру можно определить из объединенного газового закона:

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ ; } p_3V_3 = \frac{m}{\mu}RT_3.$$

Следовательно:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right).$$

Работа $\Delta A = \Delta A_{1-2} + \Delta A_{2-3}$. На каждом участке работа численно равна площади заштрихованных трапеций, расположенных под соответствующими прямыми, т. е.

$$A_{1-2} = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)\left(V_2 - V_1\right);$$

$$A_{2-3} = \frac{1}{2}\left(p_3 + p_2\right)\left(V_3 - V_1\right).$$

Таким образом:

$$\Delta Q = \frac{3}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(p_1 + p_2\right)\left(V_2 - V_1\right) + \left(p_3 + p_2\right)\left(V_3 - V_2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[p_1\left(V_2 - 4V_1\right) + p_2\left(V_3 - V_1\right) + p_3\left(4V_3 - V_2\right)\right] = -200\text{Дж}.$$

Знак «−» означает, что при протекании процесса (1−2−3) тепло выделится.

Задача XI.21 В цилиндрическом сосуде 1 под поршнем массы $m = 5$ кг находится одноатомный газ. Сосуд 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом 2, в котором под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном положении кран К закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова. Поршень в сосуде 2 расположен на высоте $H = 10$ см от дна. На какое расстояние Δh передвинется поршень в сосуде 1 после открывания крана? Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать (*рис. XI.17*).

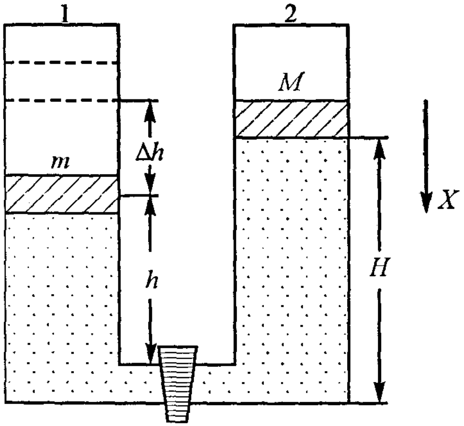


Рис. XI.17

Решение. Внутренняя энергия газа в сосудах 1 и 2 до открывания крана:

$$U_1 = \frac{3}{2}\nu_1 RT = \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}\frac{mg}{S}Sh = \frac{3}{2}mgh, \quad (1)$$

где p_1 — давление, V_1 — объем сосуда, S — площадь его поперечного сечения, h — высота, на которой находится поршень в сосуде 1, ν_1 — число молей в сосуде;

$$U_2 = \frac{3}{2}\nu_2 RT = \frac{3}{2}p_2V_2 = \frac{3}{2}\frac{Mg}{S}SH = \frac{3}{2}MgH, \quad (2)$$

где p_2 — давление, V_2 — объем сосуда, H — высота, на которой находится поршень в сосуде (2), ν_2 — число молей в сосуде.

Так как сосуды теплоизолированы, то работа по передвижению поршня может произойти только за счет внутренней энергии газа, т. е.

$$U = U_1 + U_2 + A, \quad (3)$$

где U — внутренняя энергия газа после открывания крана.

Масса второго поршня больше массы первого, поэтому после открывания крана поршень массой M опустится на дно второго сосуда, а поршень в первом сосуде поднимется на высоту Δh, и весь газ окажется в первом сосуде. Его внутренняя энергия будет равна — см. уравнения (1) и (2),

$$U = \frac{3}{2}mg(h + \Delta h). \quad (4)$$

Приравнивая уравнения (3) и (4) и учитывая, что работа по перемещению поршней A равна $A = MgH - mg\Delta h$, получим

$$\frac{3}{2}mg(h + \Delta h) = \frac{3}{2}mgh + \frac{3}{2}MgH + MgH - mg\Delta h,$$

$mg\Delta h = MgH$, откуда

$$\Delta h = \frac{MH}{m}.$$

Задача XI.22 Два одинаковых положительных точечных заряда величиной Q закреплены на расстоянии d друг от друга. Посередине между ними перпендикулярно отрезку, их соединяющему, расположена гладкая непроводящая штанга, по которой может скользить бусинка массой m с отрицательным зарядом $-q$. Определить период малых колебаний бусинки. Силой тяжести бусинки пренебречь (*рис. XI.18*).

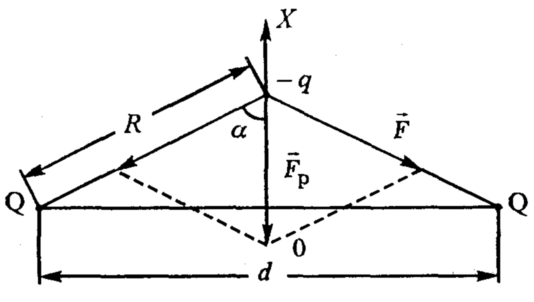


Рис. XI.18

Решение. Проведем ось $0X$ перпендикулярно отрезку d, соединяющему заряды Q. На заряд q вдоль оси $0X$ действует результирующая сила Кулона

$$F_р = 2F\cos\alpha = \frac{2qQ\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

где R – расстояние между зарядами $-q$ и Q, x – расстояние от отрезка $Q - Q$ до заряда $-q$, причем

$$R = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}\text{, а } \cos\alpha = \frac{x}{R}.$$

Второй закон Ньютона для заряда $-q$ запишется

$$-F_{\text{р}} = ma\text{, или } \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{x}{R} = ma\text{, или}$$

$$-\frac{qQx}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = mx''. \qquad (1)$$

Так как нас интересуют малые колебания бусинки, то можно полагать, что $x^2 << \left(\frac{d}{2}\right)^2$, тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$-\frac{qQx}{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^3} \approx mx''.$$

Это уравнение – не что иное, как уравнение гармонических колебаний:

$$x'' = -\frac{qQx}{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^3 m}x = -\omega^2 x,$$

где $\omega^2 = \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{d}{2}\right)^3 m} = \dfrac{4qQ}{\pi\varepsilon_0 m d^3}$.

Отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi d\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 md}{qQ}}.$$

Задача XI.23 Нижняя пластина конденсатора закреплена неподвижно на изолирующей подставке, а верхняя подвешена на упругой пружине. Расстояние между незаряженными пластинами d_0. При подаче на конденсатор напряжения U_1 – расстояние между пластинами d_1, при подаче напряжения U_2 – расстояние d_2. Определить отношение напряжений $n = \dfrac{U_2}{U_1}$ (*рис. XI.19*).

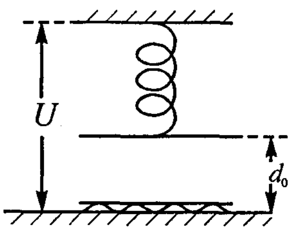


Рис. XI.19

Решение. Верхняя пластина конденсатора притягивается нижней с силой

$$F = \frac{QE}{2} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}.$$

Эта сила уравновешивается силой упругости пружины

$F_{упр} = k(d_0 - d_1)$, т. е.

$$\frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d^2} = k(d_0 - d_1) \quad \text{для напряжения } U_1;$$

$$\frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{2d^2} = k(d_0 - d_2) \quad \text{для напряжения } U_2.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{U_2^2 d_1^2}{U_1^2 d_2^2} = \frac{d_0 - d_2}{d_0 - d_1}, \text{ или}$$

$$n = \frac{U_2}{U_1} = \frac{d_2}{d_1}\sqrt{\frac{d_0 - d_2}{d_0 - d_1}}.$$

Задача XI.24 В схеме, изображенной на *рис. XI.20, (а)*, емкости конденсаторов $C_1 = 1$мкф, $C_2 = 2$мкф, $C_3 = 3$мкф, $C_4 = 4$мкф. Напряжение между точками A и B равно $U_0 = 100$В. Определить напряжение U_4 на конденсаторе C_4, если до подключения напряжения U_0 конденсаторы были незаряжены.

Решение. Эту схему можно представить как два последовательно соединенных конденсатора C_1 и C, где

$$C = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2 \text{ (}\textit{рис. XI.20}\text{, б).}$$

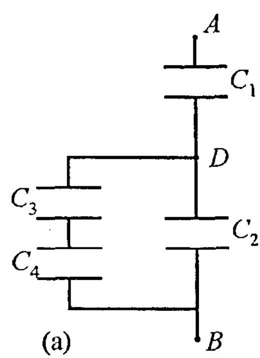


Рис. XI.20

Причем заряд на этих конденсаторах одинаков и равен

$$Q = U_0 \frac{C_1 C}{C_1 + C} = U_0 \frac{C_1\left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2\right)}{C_1 + \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2\right)}.$$

В свою очередь заряд Q распределяется между двумя конденсаторами C_2 и C_3, причем $Q = Q_{C_2} + Q_{C_3}$. Заряд на конденсаторе C_4 равен заряду на конденсаторе C_3, т. е. $Q_{C_3} = Q_{C_4}$, поскольку они соединены последовательно. А искомое напряжение $U_4 = \frac{Q_{C_4}}{C_4}$.

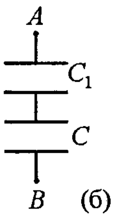


Рис. XI.20

Таким образом, чтобы ответить на вопрос задачи, нам необходимо определить заряд на конденсаторе C_4, равный Q_{C_4}.

Напряжение между точками D и B определяется по формуле

$$U_{DB} = \frac{Q}{C} = \frac{U_0 C_1}{C_1 + C} = \frac{U_0 C_1}{C_1 + \left(\frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2\right)}.$$

Заряд на емкости C_3 и C_4

$$Q_{C_3} = Q_{C_4} = U_{DB} \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{U_0 C_1 C_3 C_4}{\left(C + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} + C_2\right)(C_3 + C_4)},$$

а напряжение

$$U_4 = \frac{Q_{C_4}}{C_4} = \frac{U_{DB}C_3}{C_3 + C_4} = \frac{U_0 C_1 C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) + C_3 C_4} = \frac{100}{11}\text{ В.}$$

Задача XI.25 В схеме, изображенной на *рис. XI.21*, вначале ключ K не замкнут. На какую величину изменится заряд конденсатора, если ключ K замкнуть? R_1 = 10 кОм, R_2 = 15 кОм, C = 1 мкф, $\mathcal{E}_1$ = 34 В, $\mathcal{E}_2$ = 9 В. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Решение. При разомкнутом ключе конденсатор C заряжается от источника $\mathcal{E}_2$ и напряжение на нем $U_1 = \mathcal{E}_2$, а заряд $q_1 = C\mathcal{E}_2$. После замыкания ключа K и перезарядки конденсатора ток протекает по внешней цепи (через конденсатор ток не течет!) и его легко вычислить.

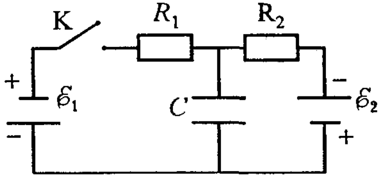


Рис. XI.21

$$-\mathcal{E}_2 + IR_2 + IR_1 - \mathcal{E}_1 = 0,\ \text{отсюда}\ I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}.$$

В этом случае напряжение на конденсаторе определяется по формуле

$$U_2 - \mathcal{E}_2 + IR_2 = 0,\ \text{или}\ U_2 = \mathcal{E}_2 - IR_2,$$

а новый заряд на нем

$$q_2 = CU_2 = C(\mathcal{E}_2 - IR_2).$$

Изменение заряда на конденсаторе равно

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C(\mathcal{E}_2 - IR_2) - C\mathcal{E}_2 = -CIR_2 =$$

$$= -CR_2 \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{R_1 + R_2} = -25{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Знак «−» означает, что заряд на конденсаторе С уменьшился.

Задача XI.26 Какое количество тепла выделится в схеме, изображенной на *рис. XI.22*, после замыкания ключа К?

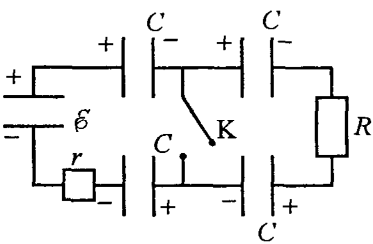


Рис. 11.22

Решение. При разомкнутом ключе все конденсаторы будут заряжены до одного и того же заряда q_1 и одного и того же напряжения U_1, так как они все одинаковы и включены последовательно, причем

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}}{4} \text{ и } q_1 = CU_1 = \frac{C\mathscr{E}}{4}.$$

Энергия всех заряженных конденсаторов

$$W_1 = 4W_0 = 4\frac{CU_1^2}{2} = \frac{C\mathscr{E}^2}{8},$$

где W_0 — энергия одного из конденсаторов.

После замыкания ключа К заряженными останутся только два конденсатора, лежащие слева от ключа. Конденсаторы, лежащие справа от ключа, не будут иметь зарядов, так как они разрядятся через сопротивление R. В этом случае напряжение на каждом из двух последовательно включенных левых конденсаторов

$U_2 = \frac{\mathscr{E}}{2}$, а заряд $q_2 = CU_2 = \frac{C\mathscr{E}}{2}$.

Энергия двух заряженных конденсаторов

$$W_2 = 2W_0' = 2\frac{CU_2^2}{2} = \frac{C\mathscr{E}^2}{4},$$

где W_0' — энергия одного из конденсаторов после замыкания ключа.

Перезарядку конденсаторов производит батарея с ЭДС $\mathscr{E}$. Она совершает работу, которая идет на изменение энергии конденсаторов и на выделение в схеме тепла. Эта работа

$$\mathscr{E}\Delta q = \Delta W + \Delta Q.$$

Отсюда количество выделенного тепла в схеме

$$\Delta Q = \mathscr{E}\Delta q - \Delta W = \mathscr{E}\left(q_2 - q_1\right) - \left(W_2 - W_1\right) =$$

$$= \mathscr{E}\left(\frac{C\mathscr{E}}{2} - \frac{C\mathscr{E}}{4}\right) - \left(\frac{C\mathscr{E}^2}{4} - \frac{C\mathscr{E}^2}{8}\right) = \frac{C\mathscr{E}^2}{8}.$$

Задача XI.27 Два одинаковых гальванических элемента с внутренним сопротивлением $r = 1{,}2$ Ом каждый соединены параллельно и нагружены на внешнее сопротивление R. Если эти элементы соединить последовательно, то мощность, выделяемая в том же сопротивлении нагрузки, возрастет в $n = 2{,}25$ раза. Определить сопротивление нагрузки R (*рис. XI.23*).

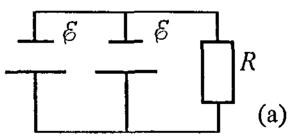
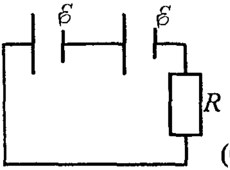


Рис. XI.23



(б)

Рис. XI.23

Решение. Энергия, выделяемая на сопротивлении R, определяется законом Джоуля – Ленца $W = I^2R$, где ток можно вычислить из закона Ома для полной цепи:

для 1-й схемы (*рис. XI.23, а*) $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{\dfrac{r}{2} + R}$;

для 2-й схемы (*рис. XI.23, б*) $I_2 = \dfrac{2\mathscr{E}}{2r + R}$.

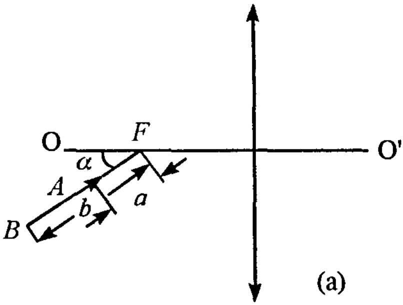
По условию задачи $n = \dfrac{W_2}{W_1}$, т. е.

$n = \dfrac{I_2^2}{I_1^2}$, или $\dfrac{I_2}{I_1} = \sqrt{n}$, отсюда

$$R = r\frac{2\sqrt{n} - 1}{2 - \sqrt{n}} = 0{,}8 \text{ Ом}.$$

Задача XI.28 Отрезок AB расположен вдоль прямой, проходящей через фокус собирающей линзы под углом $\alpha = 60^\circ$ к ее главной оптической оси. Расстояния от точек A и B до фокуса F равны соответственно: $a = 5$ см, $b = 10$ см. Чему равно фокусное расстояние линзы F, если известно, что длина отрезка AB равна длине его изображения (*рис. XI.24, а*).

Решение. Проведем один «замечательный» луч через крайние точки A и B и оптический центр



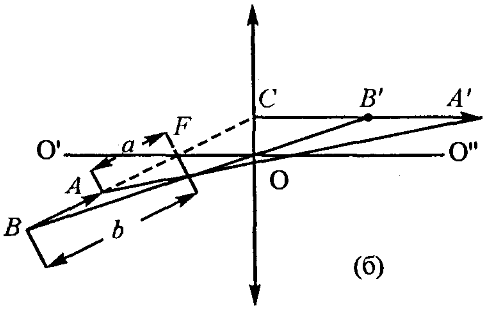


Рис. XI.24

линзы. Второй «замечательный» луч проведем через крайние точки A и B и фокус. Этот луч пройдет после линзы параллельно главной оптической оси и пересечет первые «замечательные» лучи в точках A' и B'. Отрезок $B'A'$ и будет изображением отрезка AB (*рис. XI.24, б*).

Теперь рассчитаем фокусное расстояние линзы. Из подобных треугольников ACA' и AFO следует

$$\frac{CA'}{OF} = \frac{CF + a}{a}, \text{ отсюда}$$

$$CA' = \frac{OF}{a}\left(\frac{OF}{\cos\alpha} + a\right) = \frac{OF^2}{a\cos\alpha} + OF.$$

Из подобных треугольников BCB' и BFO следует

$$\frac{CB'}{OF} = \frac{CF + b}{b}, \text{ отсюда } CB' = \frac{OF^2}{b\cos\alpha} + OF,$$

$$B'A' = CA' - CB' = \frac{OF^2}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Так как по условию задачи $B'A' = BA = b - a$, то

$$(b - a) = \frac{OF^2}{\cos\alpha}\left(\frac{b-a}{ab}\right). \text{ Следовательно}$$

$$OF = F = \sqrt{ab\cos\alpha} = 5 \text{ см}.$$

Задача XI.29 Точечный источник света S и две одинаковые собирающие линзы расположены как показано на рисунке (*рис. XI.25*). Определить расстояние x между изображениями источника, если известно, что фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, диаметр линзы $d = 4$ см, а расстояние от источника света до центра каждой из линз $l = 20$ см.

Решение. Вначале построим изображение источника. Для этого проведем два «замечательных» луча из источника через оптические центры линз (лучи $SO'S'$ и $SO''S''$). Они пройдут через линзы, не преломляясь. Следующий «замечательный» луч направим вдоль линии раздела линз (для них он

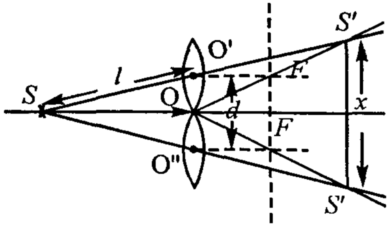


Рис. XI.25

будет параллельным главным оптическим осям). Он после линз пройдет через их фокусы. Точки пересечения этих замечательных лучей укажут место положения изображений S' и S''. Место положения изображений определяется формулой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}, \text{ или } b=\frac{aF}{a-F},$$

где $a=\sqrt{l^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}$.

Из подобия треугольников $S'SS''$ и $O'SO''$ имеем

$$\frac{x}{d}=\frac{a+b}{a}, \text{ следовательно:}$$

$$x=\frac{d(a+b)}{a}=d\left(1+\frac{b}{a}\right)=d\left(\frac{a}{a-F}\right)=d\,\frac{\sqrt{l^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}}{\sqrt{l^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}-F}\approx 8{,}04\text{ см}.$$

Задача XI.30 Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через стеклянную призму с малым преломляющим углом α (*рис. XI.26*). Длина падающей волны λ, показатель преломления n. На экране волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют. Определить расстояние между соседними максимумами интерференционной картины.

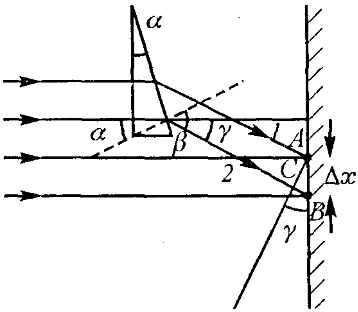


Рис. XI.26

Решение. В точках A и B можно наблюдать два соседних максимума, если разность хода между лучами 1 и 2 будет равна длине волны, т. е.

$$\Delta = CB = \lambda, \text{ или } \lambda = CB = AB\sin\gamma \approx \Delta x\gamma,$$

где γ – это угол, на который отклоняется луч при выходе из призмы (см. рис.). Он равен $\gamma = (n-1)\alpha$. Таким образом $\lambda = \Delta x(n-1)\alpha$, отсюда расстояние между соседними максимумами

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n-1)\alpha}.$$

Задача XI.31 На непрозрачный экран, в котором сделаны две параллельные одинаковые щели, нормально падает параллельный пучок света. Длина волны света $\lambda = 0{,}5$ мкм. Расстояние между щелями d = 50 мкм. За экраном расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 20$см так, что ее оптическая ось перпендикулярна плоскости экрана и проходит через середину промежутка между щелями. Определить ширину центрального дифракционного максимума, наблюдаемого в фокальной плоскости линзы (*рис. XI.27*).

Решение. Все точки волновой поверхности падающего на щель пучка являются источником вторичных волн, колеблющихся в одинаковой фазе. За счет дифракции (огибания) свет после прохождения щелей распространяется во всех направлениях. Рассмотрим два параллельных луча AD и BE, идущих от симметричных точек щелей A и B под некоторым углом φ к вертикали.

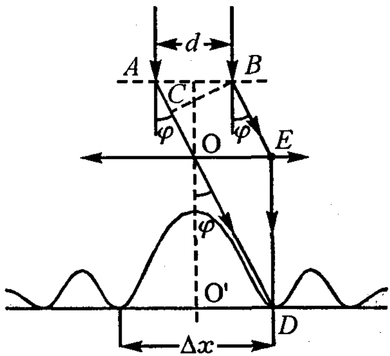


Рис. XI.27

Причем луч AD проведем через оптический центр линзы. Луч BE после линзы также попадет в точку D на экран, который расположен в фокальной плоскости. Центральный дифракционный максимум лежит между двумя симметричными первыми минимумами. Это значит, что разность хода $AC = \Delta$ между двумя лучами AD и BE, рассеянных от симметричных точек A и B, должна удовлетворять условию дополнительных минимумов (см. п.X.8) :

$$AC = \Delta = d\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}, \text{ или } \sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Для малых углов φ

$$\sin\varphi \approx \varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

С другой стороны, из треугольника $OO'D$

$\varphi = \dfrac{\Delta x}{2f}$, таким образом :

$$\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{\Delta x}{2f}, \text{ откуда } \Delta x = \frac{\lambda f}{d} = 0{,}2\,\text{см}.$$