Целесообразно приучать школьников к следующей последовательности действий при оперировании векторными уравнениями.

После того как уравнение записано в векторной форме (например, $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$), записывается уравнение в проекциях: $v_x=v_{0x}+a_xt$ (знаки проекции скрыты в обозначениях). Затем после выбора оси находятся алгебраические значения проекций и уравнение записывается через модули, после чего в уравнение подставляются числовые значения величин. Так как в условиях задач обычно даются числовые значения модулей векторов, а не значения проекций с учетом знаков, то целесообразно подставлять числовые значения именно в уравнение, написанное в модулях, а не в проекциях (в условии задачи нельзя задать значение проекции, так как знак проекции зависит от выбора положительного направления оси, а учащийся может выбрать их как угодно). Заметим попутно, что в обозначении проекции всегда следует ставить индекс оси, т. е. проекцию вектора $\vec{a}$ на ось Ox обозначать a_x, а не a, поскольку так часто обозначают модуль вектора, опуская вертикальные черточки в обозначении вектора.

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению алгоритмов решения задач по механике.

§ 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Для овладения методом решения кинематических задач учащиеся должны усвоить следующие вопросы: понятия — система отсчета, скорость, ускорение; уравнения, определяющие зависимость координат и скорости от времени в равномерном и равноускоренном движениях, закон сложения скоростей Галилея, идею о том, что всякое движение можно разложить на два (в общем случае — на три) простых движения вдоль осей координат; идею о том, что любое тело, какую бы скорость оно ни имело, будет двигаться под действием притяжения к Земле с ускорением, равным g, направленным вертикально вниз (при отсутствии сопротивления среды).

Решение кинематических задач вызывает затруднения, связанные прежде всего с тем, что учащиеся не могут разобраться в обилии формул, с которыми они знакомятся в кинематике, и не всегда понимают, что есть формулы, выражающие определения кинематических величин (скорости и ускорения), и есть кинематические уравнения движения двоякого рода: уравнения, выражающие зависимость координат от времени, и уравнения, выражающие зависимость скорости от времени. И вообще-то большинство кинематических задач, как для равномерного, так и для равноускоренного движения, могут быть решены на основе двух уравнений:

$$x=x_0+v_{0x}t+\frac{a_xt^2}{2},\quad v_x=v_{0x}+a_xt.$$

Эти уравнения при $a=0$ переходят в уравнения для равномерного движения, которые являются следствиями этих основных.

Есть и еще одно следствие из этих уравнений:

$$v_x^2 = v_{0x}^{\ 2} + 2a_x s_x,$$

которое позволяет найти скорость, если задано не время движения, а то перемещение, в конце которого определяется скорость. Важно, чтобы учащиеся понимали, что эти уравнения связывают положение и скорость точки в начальный момент времени $t=0$ (т. е. начальные условия — x_0 и v_{0x}) и положение и скорость точки в другом ее состоянии, в другой, последующий момент времени, и потому эти уравнения позволяют решить основную задачу механики, если задано ускорение. Зная начальные условия и ускорение, можно написать эти уравнения для любого интересующего нас момента времени, для любой точки траектории и найти искомые величины. В этом суть решения большинства кинематических задач, и это учащиеся должны хорошо понимать.

Много трудностей вызывает у учащихся рациональный выбор системы отсчета. В связи с этим следует разъяснить, что в кинематике нет никаких ограничений в том, с каким телом связывается система отсчета, что принимается за начало системы координат, за начальный момент времени. Однако, хотя систему отсчета можно выбрать произвольно и по-разному, ее следует выбирать так, чтобы легко было определить начальные условия и чтобы в ней движение описывалось наиболее простым образом (учащиеся склонны систему отсчета связывать с Землей, что отнюдь не всегда является рациональным). Сложным является для учащихся и описание данного движения в разных системах отсчета, а также определение в них скорости тела.

Вообще, как показывает опыт, координатный метод решения кинематических задач и соответствующий алгоритм усваивается учащимися очень нелегко и в полной мере может быть изучен на факультативных занятиях.

Среди разнообразных кинематических задач можно выделить задачи на прямолинейное равномерное движение одной точки и системы точек, задачи на сложение движений, когда системы отсчета движутся вдоль одной прямой и во взаимно перпендикулярных направлениях, задачи на прямолинейное равнопеременное движение, когда по начальным условиям определяется последующее состояние точки. К кинематическим же относятся и задачи на свободное падение тела в поле силы тяжести (тело может быть брошено вертикально вверх, горизонтально, под углом к горизонту). Эти задачи часто решаются после изучения динамики, хотя по сути дела являются кинематическими. «Динамический элемент» в них состоит лишь в том, что как бы тело ни было брошено в поле силы тяжести, последняя в соответствии со вторым законом Ньютона сообщает ему ускорение $\vec{g}$. Для усвоения этой мысли, рассматривая движение тела, брошенного в поле силы тяжести, можно сообщить учащимся, что во всех случаях тело имеет ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз; вдоль горизонтальной оси $g_x=0$, т. е. тело движется равномерно, вдоль вертикальной оси $g_y=\text{const}$, т. е. тело движется равнопеременно. Позже этому будет дано строгое объяснение на основе второго закона Ньютона. Однако уже и в кинематике можно привести довод, подтверждающий справедливость этого утверждения. Рассматривая в этой теме ускорение свободного падения и известные опыты Галилея, показавшие, что при отсутствии сопротивления все тела падают с одинаковым ускорением, можно сообщить, что Галилей изучал и движение тела, брошенного горизонтально, под углом к горизонту, и показал, что если одновременно одно тело отпустить ($v_0=0$), а второму сообщить горизонтальную скорость, то они пройдут до момента падения разные пути, причем при большой начальной скорости второе тело может пройти очень большой путь. Однако упадут оба тела одновременно (полезно показать это на опыте с известным прибором).

Такое забегание вперед оправдывается тем, что, сделав его, мы существенно увеличиваем круг задач для отработки координатного метода в кинематике (а для этого нужно решение достаточно большого числа задач). Оставляя за учителем право решать этот вопрос, мы тем не менее рассмотрим решение задач о движении тела, брошенного в поле силы тяжести, в разделе «Кинематика». В остальном же перечень видов задач, приведенный выше, соответствует последовательности изложения кинематики в стабильном учебнике.

Алгоритм решения кинематических задач может быть введен уже при изучении равномерного прямолинейного движения. При этом целесообразно это сделать на задачах о движении двух материальных точек, так как это позволяет сформулировать алгоритм практически в полном виде и показать его полезность (чего нельзя сделать на основе простых задач о движении одной точки).

Задача 1. Два автомобиля движутся прямолинейно в одну сторону с постоянными скоростями v_1 и v_2 (причем $v_1 > v_2$), и в некоторый момент времени расстояние между ними равно s. Через сколько времени и в каком месте первый автомобиль догонит второй?

x_C, τ — ?
v_1
v_2
s

Решение

1. Используя общий план решения любой физической задачи, после изучения и записи условия, выполнения чертежа (рис. 1), выбираем систему отсчета, т. е. тело отсчета (Земля), начало системы координат (точка A), положительное направление оси (направление движения) и момент времени, принимаемый за начальный (момент, когда автомобили находились на расстоянии s). Анализируем описанные в тексте физические процессы.

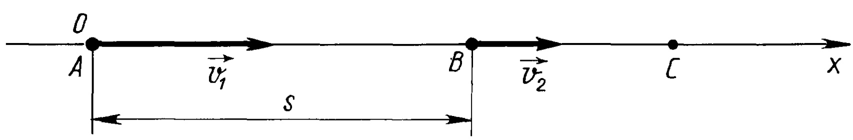

Рис. 1

2. Обе материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, следовательно, их движения описываются уравнениями:

$$x_1 = x_{01} + v_{1x}t, \quad x_2 = x_{02} + v_{2x}t.$$

3. Чтобы решить вопрос о последующем состоянии точек, надо знать их начальные состояния, начальные условия, т. е. координаты и скорости в момент времени, принимаемый за начальный. Начальная скорость обычно обозначается v_0. Так как автомобили движутся равномерно, то их начальная скорость совпадает со скоростями в любые последующие моменты и потому:

$$x_{01} = 0, \; v_{01x} = v_1; \; x_{02} = s, \; v_{02x} = v_2.$$

С учетом этого уравнения примут вид: $x_1 = v_1 t$, $x_2 = s + v_2 t$.

4. Эти уравнения справедливы для любого момента времени, для любой точки траектории (здесь t — переменная величина, которая может принимать любые значения). Следовательно, они справедливы и для интересующего нас момента, когда первый автомобиль догонит второй в точке C. Обозначим этот момент времени τ. Тот факт, что один автомобиль догнал другой, означает, что в момент $t = \tau$ они находились в одной и той же точке пространства, т. е. $x_1 = x_2 = x_C$. Тем самым мы выявили в тексте задачи дополнительные условия, выразили их на математическом языке, и теперь можно написать уравнения для данного момента времени, т. е. для движения в точке C:

$$\begin{cases} x_C = v_1 \tau, \\ x_C = s + v_2 \tau. \end{cases}$$

Отсюда
$$\tau = \frac{s}{v_1 - v_2}, \quad x_C = \frac{v_1 s}{v_1 - v_2}.$$

После решения данной задачи выделяются основные этапы, «шаги» решения, затем решается другая задача по тем же этапам.

Задача 2. Два автомобиля движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями v_1 и v_2. Первый автомобиль проходит пункт A на промежуток времени Δt раньше, чем второй проходит пункт B. Определить, когда и где произойдет их встреча, если расстояние между A и B равно s.

τ, x_C — ?
v_1
v_2
s
Δt

Решение

1. Выберем систему отсчета (рис. 2). Систему координат свяжем с Землей, начало отсчета выберем в точке A, за положительное направление оси Ox примем направление от A к B, за начальный момент времени $t = 0$ примем момент, когда первый автомобиль проходил точку A.

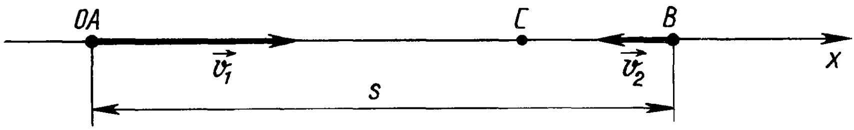

Рис. 2

2. Из условия ясно, что оба автомобиля двигались равномерно, следовательно, можно написать для каждого кинематические уравнения равномерного движения:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v_{1x}t_1, \\ x_2 = x_{02} + v_{2x}t_2. \end{cases}$$

3. Для определения того, где будет находиться материальная точка в последующие моменты времени, надо знать начальные условия (а если движение равноускоренное, то и ускорение точки). Определим начальные условия:

$$x_{01} = 0,\ v_{01x} = v_1 = \mathrm{const};\ x_{02} = s,\ v_{02x} = -v_2 = \mathrm{const}.$$

Так как первый автомобиль раньше прошел точку A, чем второй точку B, то

$$t_2 = t_1 - \Delta t.$$

С учетом этого уравнения приобретут вид:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t_1, \\ x_2 = s - v_2(t_1 - \Delta t). \end{cases}$$

4. Эти уравнения справедливы для любого момента времени, для любой точки траектории, следовательно, они справедливы и для интересующего нас момента — момента встречи. В условии задачи явно заданы четыре величины (s, v_1, v_2, Δt), но, кроме этого, в тексте содержится дополнительное условие, состоящее в том, что автомобили встретились в некоторый момент времени в некоторой точке траектории. Эти дополнительные условия надо выразить на математическом языке и ввести в уравнения движения. Обозначим время, прошедшее до момента встречи, через τ, а координату точки встречи (точки C) — x_C. Слова условия о том, что автомобили встретились, означают, что в момент $t_1 = \tau$ координаты автомобилей одинаковы, т. е. для точки C имеем:

$$t_1 = \tau,\ x_1 = x_2 = x_C.$$

Напишем уравнения движения для момента τ, для точки C:

$$\begin{cases} x_C = v_1\tau, \\ x_C = s - v_2(\tau - \Delta t). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$\tau = \frac{s + v_2\Delta t}{v_1 + v_2},\quad x_C = \frac{s + v_2\Delta t}{v_1 + v_2} v_1.$$

Сравнение решения обеих задач позволяет выявить общность в последовательности действий и сформулировать следующий *алгоритм решения кинематических задач:*

1) выбрать систему отсчета (это предполагает выбор тела отсчета, начала системы координат, положительного направления осей, момента времени, принимаемого за начальный);

2) определить вид движения вдоль каждой из осей и написать *кинематические уравнения движения вдоль каждой оси — уравнения для координаты и для скорости (если тел несколько, уравнения пишутся для каждого тела);*

3) определить начальные условия (координаты и проекции скорости в начальный момент времени), а также проекции ускорения на оси[1] и подставить эти величины в уравнения движения;

4) определить дополнительные условия, т. е. координаты или скорости для каких-либо моментов времени (для каких-либо точек траектории), и написать кинематические уравнения движения для выбранных моментов времени (т. е. подставить эти значения координат и скорости в уравнения движения);

5) полученную систему уравнений решить относительно искомых величин.

Формулируя этот алгоритм, надо объяснить учащимся, что в задачах 1 и 2, на решение которых опиралось его обоснование, материальные точки двигались равномерно вдоль одной оси; однако в дальнейшем будут изучаться другие виды движения, описываемые другими кинематическими уравнениями, и чтобы знать, какое уравнение использовать, надо прежде всего установить, каков вид движения материальной точки вдоль оси. При этом иногда придется рассматривать движение вдоль не одной, а двух осей, и надо будет выяснять вид движения вдоль каждой оси.

Опыт показывает, что обучение применению этого алгоритма происходит отнюдь не легко даже и на факультативных занятиях, где алгоритм может быть дан (в отличие от обязательного курса) в полном виде. Только после длительных упражнений в применении алгоритма учащиеся начинают сознательно выполнять все операции и ощущают универсальность и пользу алгоритма. Дело в том, что выполнение каждой из указанных в алгоритме операций отнюдь не тривиально и требует серьезной самостоятельной работы в каждом конкретном случае. В связи с этим прокомментируем отдельные операции и дадим некоторые разъяснения на конкретных примерах, которые могут быть использованы на факультативных занятиях. Заметим, что все задачи, приводимые в последующем в качестве примеров, решаются по алгоритму, однако, в целях сокращения записей, мы не всегда выделяем в решении все пункты алгоритма и в ряде случаев приводим сокращенное, «свернутое» решение.

После упражнений в применении алгоритма для решения задач на равномерное прямолинейное движение следует перейти к решению задач на сложение движений и показать, что и в этих задачах может быть использован данный алгоритм, только помимо кинематических уравнений движения надо воспользоваться законом сложения скоростей Галилея в векторной форме $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$ и перейти от нее к скалярной. Решение этих задач очень полезно осуществлять при разном выборе систем отсчета и показать, как рациональный выбор системы отсчета упрощает решение.

---

[1] Это предписание об ускорении следует добавить после решения задач на ускоренное движение.

Задача 3. Катер, двигаясь против течения реки, проплывает около стоящего на якоре буя и встречает там плот. Через 12 мин после встречи катер повернул обратно и догнал плот на расстоянии 800 м ниже буя. Найти скорость течения реки.

v_0 — ?
$s=800$ м
$t_1=12$ мин

Первый вариант решения

Систему отсчета свяжем с буем. За начальный момент времени возьмем момент, когда катер встретил плот (рис. 3).

Плот относительно буя движется со скоростью v_0. Скорость катера относительно буя обозначим v. По закону сложения скоростей $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_0$, где v_1 — скорость катера относительно плота (движущейся воды). Тогда при движении вверх по реке $-v=v_0-v_1$ и $v=v_1-v_0$, а при движении вниз по реке $v=v_0+v_1$. Запишем уравнения движения тел:

$$\begin{cases} x_п=v_0 t, \\ x_к=-(v_1-v_0)t_1+(v_1+v_0)(t-t_1), \end{cases}$$

где t — время, отсчитываемое от начального момента до любого последующего. Для момента, когда катер догонит плот (для точки A), имеем: $t=\tau$, $x_п=x_к=s$, $v_0\tau=-(v_1-v_0)t_1+(v_1+v_0)(\tau-t_1)$, откуда

$$\tau=2t_1, s=v_0\tau \text{ и } v_0=\frac{s}{2t_1}=1,1 \text{ м/с.}$$

Второй вариант решения

Систему отсчета свяжем с плотом. Тогда уравнения движения будут:

$$\begin{cases} x_п=0 \text{ (в любой момент времени)}, \\ x_к=-v_1t_1+v_1(t-t_1). \end{cases}$$

Для точки A имеем: $t=\tau$, $x_п=x_к$, $0=-v_1t_1+v_1\tau-v_1t_1$.
Тогда

$$\tau=2t_1, \ v_0=\frac{s}{2t_1}.$$

Очевидно, что второй вариант решения проще.

При изучении кинематических уравнений равноускоренного прямолинейного движения обычно решаются тренировочные задачи, показывающие применение этих уравнений. Это, конечно, необходи-

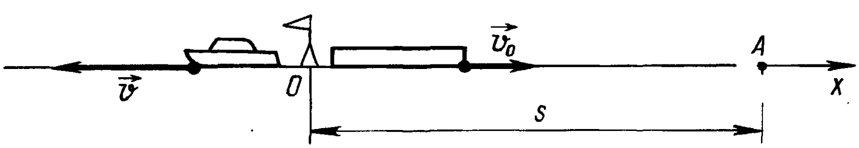

Рис. 3

мо, но такие задачи столь просты, что полезность алгоритма при этом не ощущается и он не используется в полной мере. Поэтому полезно решать и такие задачи, в которых алгоритм используется явно и позволяет решить многие вопросы, связанные с заданным в условии движением. Такими могут быть задачи о движении по наклонной плоскости. Естественно, что до изучения динамики нельзя показать, что в этом случае $a=g\sin\alpha$ (при отсутствии трения). Поэтому, показав это движение на опыте, надо рассказать о том, что Галилей, исследуя это движение, доказал, что оно будет равноускоренным. В условии задачи при этом надо задавать значение постоянного ускорения (в динамике к этому вопросу полезно вновь вернуться, показав что $a=g\sin\alpha$). Важно подчеркнуть при этом, что задачи, в которых тело движется равноускоренно, решаются точно по такому же алгоритму, как и задачи на равномерное движение, т. е. сформулированный ранее алгоритм дает общий метод решения всех задач по кинематике (в двух алгоритмах нет никакой нужды). Единственное дополнение, которое надо сделать к алгоритму,— это указание на необходимость определения проекций ускорений на оси. Все это можно разъяснить при решении следующей задачи.

Задача 4. Тело начинает двигаться с начальной скоростью 0,2 м/с вверх по наклонному желобу с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. Определить время движения до остановки t_1, путь, который пройдет тело за это время s_1, через сколько времени тело вернется в начальное положение t_2 и какой путь пройдет за это время s_2, путь s_3, пройденный за время $t_3=3$ с, где будет находиться тело, когда его скорость $v_1=0{,}1$ м/с.

t_1, s_1, t_2, s_2, x_1, s_3 — ?

$v_0=0{,}2$ м/с
$a=0{,}1$ м/с^2
$v_1=0{,}1$ м/с
$t_3=3$ с

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 4). Так как движение равноускоренное, то уравнения движения вдоль оси будут иметь вид:

$$\begin{cases} x=x_0+v_{0x}t+\dfrac{a_xt^2}{2}, \\ v_x=v_{0x}+a_xt. \end{cases}$$

Определим начальные условия $x_0=0$, $v_{0x}=v_0$. Так как движение вверх по наклонной плоскости будет замедленным, а вниз ускоренным (что может быть показано на опыте или с помощью стробограммы), то ускорение в течение всего времени движения будет направлено

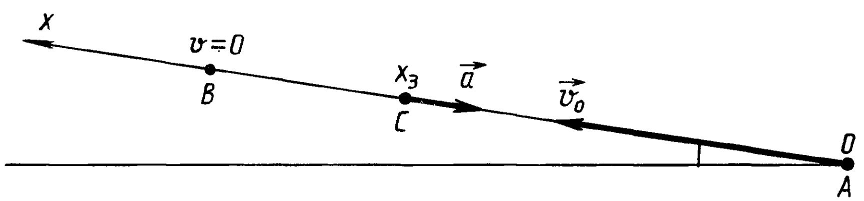

Рис. 4

вниз, а поэтому $a_x = -a$. С учетом сказанного и начальных условий уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}, \\ v_x = v_0 - at. \end{cases}$$

Эти уравнения справедливы для любого момента времени (здесь t — переменная величина). Напишем эти уравнения для интересующих нас моментов времени — t_1 (когда тело находится в точке B), t_2 (когда оно вернется в точку A), t_3 (когда оно окажется в точке C). Для этого надо определить координаты и скорости в данных точках (дополнительные условия) и подставить все эти значения в уравнения движения.

Для точки B имеем: $t = t_1$, $x = s$, $v = 0$. Тогда

$$\begin{cases} s_1 = v_0 t_1 - \dfrac{at^2}{2}, \\ 0 = v_0 - at_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 2 \text{ с}, \quad s_1 = 0{,}2 \text{ м}.$$

Для точки A имеем: $t = t_2$, $x = 0$. Тогда

$$0 = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{2v_0}{a} = 4 \text{ с}.$$

Путь, пройденный к моменту t_2,

$$s_2 = 2s_1 = 0{,}4 \text{ м}.$$

Для точки C имеем: $t = t_3$, $x = x_3$,

$$x_3 = v_0 t_3 - \frac{at_3^2}{2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Очевидно, что за время $t_3 = 3$ с тело дошло до верхней точки B и стало двигаться вниз. Путь, пройденный до точки B, равен 0,2 м, путь, пройденный от точки B до точки C, будет: 0,2 м — 0,15 м = 0,05 м; тогда искомый путь, пройденный к моменту t_3, будет:

$$s_3 = AB + BC = 0{,}2 \text{ м} + 0{,}05 \text{ м} = 0{,}25 \text{ м}.$$

Чтобы найти, где находится тело к моменту, когда его скорость станет $v_1 = 0{,}1$ м/с, можно воспользоваться вышеприведенными уравнениями движения для координаты и скорости и, определив по последнему время движения до момента, когда $v_1 = 0{,}1$ м/с, найти искомую координату x_1. Однако проще найти ее, используя уравнение

$$v_x^2 - {v_{0x}}^2 = 2a_x s_x,$$

где s_x — перемещение до данного момента, равное координате в этот момент x_1. Тогда

$$v_1^2 - v_0^2 = -2ax_1 \text{ и } x_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a} = 0{,}15 \text{ м}.$$

Обстоятельный анализ хотя бы части этой задачи с классом под руководством учителя позволяет отработать умения в применении всех предписаний алгоритма, показать целесообразность использования уравнения $v = f(s)$ и разъяснить отличие понятий: путь, перемещение, координата (во всяком случае это следует сделать на факультативных занятиях).

После этого полезно решить задачу о координате встречи двух тел, одно из которых приобретает скорость, направленную вверх по наклонной плоскости, а другое — вниз (при заданном ускорении).

При выборе системы отсчета очень важно приучать учащихся к необходимости четко фиксировать начало системы координат и момент времени, принимаемый за начальный. Для иллюстрации этой мысли приведем в качестве примера следующую задачу.

Задача 5. В некоторый момент времени тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и имело в точке с координатой 2 м скорость 2 м/с, а в точке с координатой 3 м скорость 3 м/с. Определить, было ли тело в процессе движения в точке с координатой 1 м.

x_0 — ?
$x_1 = 1$ м
$x_2 = 2$ м
$x_3 = 3$ м
$v_2 = 2$ м/с
$v_3 = 3$ м/с

Решение

Прежде всего, анализируя условие задачи, надо перевести на математический язык вопрос задачи — что значит «было ли тело в точке с координатой 1 м?». Здесь неизвестно, откуда тело начало двигаться, т. е. его начальное положение — x_0. Если $x_0 > 1$ м, то точка не проходила положения с координатой $x_1 = 1$ м, если $x_0 < 1$ м, то это положение точка проходила в процессе движения. Следовательно, вопрос задачи в том, какова начальная координата x_0.

Выбираем систему отсчета, приняв за начало системы координат некоторую точку O, от которой ведется отсчет координат, а за начальный момент времени тот, с которого тело начало движение, т. е. при $t = 0$, $v_0 = 0$ (однако это не значит, что точка находилась в этот момент в начале отсчета координаты — в точке O, положение точки в этот момент может быть, например, либо O_1, либо O_2 — рис. 5).

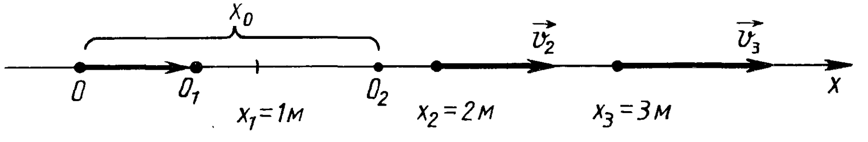

Рис. 5

Отсюда видно, что предписание «выбрать систему отсчета» в каждом конкретном случае требует серьезной мыслительной работы учащегося и отнюдь не сводится к механической деятельности по образцу.

Дальнейшее решение задачи состоит в следующем. Так как в условии задачи сказано, что точка движется равноускоренно с $v_0=0$, то ясно, какие уравнения движения надо написать. Обычно учащиеся в такого рода задачах пишут уравнения вида $x=f(t)$, $v=\varphi(t)$, т. е. уравнения

$$x=x_0+\frac{a_x t^2}{2},\quad v_x=a_x t.$$

Эти уравнения можно написать для заданных точек с координатами x_1 и x_2 (соответственно для моментов времени t_2 и t_3). Однако поскольку время не требуется найти, то целесообразно воспользоваться уравнением, не содержащим времени, т. е. уравнением вида $v_x=f(s_x)$.

Таким образом, эта задача также позволяет показать, что в случаях, когда время не задано и его не требуется найти, полезно пользоваться уравнением вида $v_x=f(s_x)$. Итак, имеем: $v_x^2=2a_x s_x$, а так как $s_x=x-x_0$ и направления скорости, ускорения и перемещения совпадают с направлением оси, то $v^2=2a(x-x_0)$. Это уравнение справедливо для каждой точки траектории, в том числе и для точек с координатами x_2 и x_3. Тогда с учетом этих дополнительных условий имеем:

$$\begin{cases} v_2{}^2=2a(x_2-x_0), \\ v_3{}^2=2a(x_3-x_0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$x_0=\frac{v_2{}^2x_3-v_3{}^2x_2}{v_2{}^2-v_3{}^2}=1{,}2\ \text{м}.$$

Следовательно, тело начало двигаться из положения с координатой 1,2 м, а значит, в процессе движения оно не проходило положение с координатой $x_1=1$ м.

Ход рассуждений может быть и другим. Допустим, что тело проходило положение с координатой $x=1$ м. Тогда

$$\begin{cases} v_2{}^2-v_1{}^2=2a(x_2-x_1), \\ v_3{}^2-v_2{}^2=2a(x_3-x_2). \end{cases}$$

Исключая из системы уравнений одно неизвестное a, можно найти и другое неизвестное v_1; получается $v_1=\sqrt{-1}$, что не имеет смысла, следовательно, исходное положение о том, что тело проходило положение с координатой $x_1=1$ м, неверно.

Однако этот вариант решения требует догадки, и вряд ли можно надеяться, что учащиеся самостоятельно изберут его.

Применение алгоритма к решению задачи на свободное падение тел полезно показать на следующей задаче.

Задача 6. Свободно падающее тело за последнюю секунду сво-

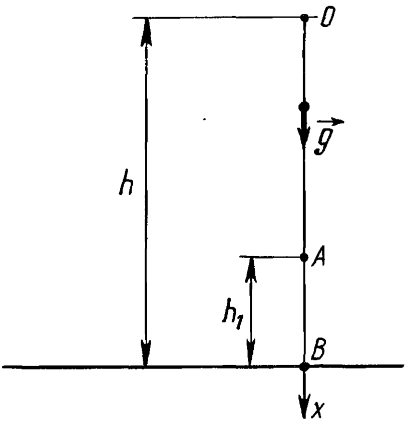

Рис. 6

его падения проходит путь h_1. Определить высоту и время всего падения.

h, τ — ?
$t_1 = 1$ с
h_1
g

Решение

Очень часто учащиеся связывают систему отсчета с Землей и направляют ось из точки падения вверх. Это вполне правомерно, однако при таком выборе системы отсчета неизвестна начальная координата, к тому же проекция ускорения будет отрицательна. Можно (и в некотором отношении это удобнее) за начало системы координат взять связанную с Землей точку, из которой началось падение, тогда при любой высоте падения начальная координата известна: $x_0 = 0$, ось же Ox направить вниз (рис. 6).

С учетом начальных условий ($x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$) запишем

$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

Для точки B имеем: $t = \tau$, $x = h$. Тогда

$$h = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Для точки A: $t = \tau - t_1$, $x = h - h_1$. Тогда

$$h - h_1 = \frac{g(\tau - t_1)^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \frac{gt_1^2 + 2h_1}{2gt_1}, \quad h = \frac{(2h_1 + gt_1^2)^2}{8gt_1^2}.$$

Далее решаются задачи на движение тел, брошенных вертикально вверх. Вот одна из таких задач.

Задача 7. С вертолета, поднимающегося вертикально вверх со скоростью v_0, с высоты h над Землей отпускают тело. Определить, через сколько времени оно упадет на Землю и с какой скоростью.

τ, v — ?
v_0
h
g

Решение

Обычно учащиеся не сознают, что в момент отпускания тела с поднимающегося вверх вертолета его скорость по отношению к Земле будет равна скорости вертолета, а по отношению к вертолету она будет равна нулю. Разъяснив это, выбираем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 7).

Уравнения движения тела будут:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ v_x = v_{0x} + a_x t. \end{cases}$$

Учитывая начальные условия и то, что $a_x = -g$ на всем протяжении движения тела, имеем:

$$\begin{cases} x = h + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ v_x = v_0 - gt. \end{cases}$$

Для момента падения тела на землю (точка O) $t = \tau$, $x = 0$, $v_x = -v$. Тогда

$$\begin{cases} 0 = h + v_0\tau - \dfrac{g\tau^2}{2}, \\ v = v_0 - g\tau. \end{cases}$$

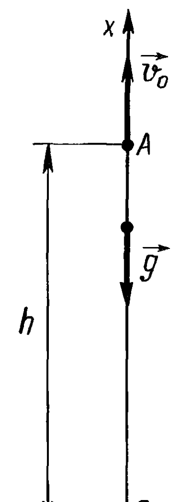

Рис. 7

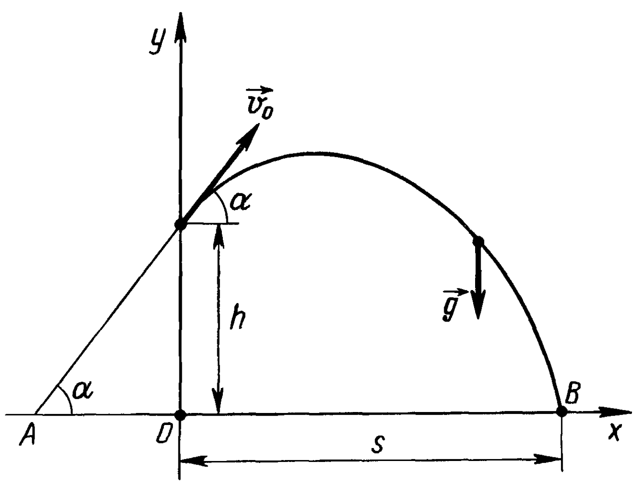

Рис. 8

Отсюда, решая систему уравнений, можно найти τ и v:

$$\tau = \frac{\sqrt{2gh + v_0^2} + v_0}{g}, \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Решение первых задач на движение тела, брошенного горизонтально или под углом к горизонту, также следует выполнить с использованием алгоритма, после чего необходимы упражнения в решении этого типа задач. Приведем примеры двух таких задач.

Задача 8. Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист при отрыве от края трамплина с углом наклона к горизонту α, чтобы перепрыгнуть ров шириной s, если высота края трамплина h?

v_0 — ?
α
h
s
g

Решение

При решении этой задачи учащиеся часто ось Ox проводят вдоль дна рва, что не позволяет определить начальную координату y_0, так как не задана глубина рва. Иногда за начало системы координат берут точку A, что осложняет определение начальной координаты x_0. Удобнее всего выбрать начало осей так, как указано на рисунке 8.

Сложное движение мотоциклиста можно разложить на два простых вдоль осей координат. Определим вид каждого из них. Так как тело, брошенное как угодно вблизи Земли, имеет ускорение $\vec{g}$, направленное вертикально вниз в любой точке траектории, то $a_x = 0$, и, следовательно, вдоль оси Ox движение будет равномерным, а $a_y = \text{const}$, т. е. вдоль оси Oy движение будет равноускоренным. Тогда уравнения движения вдоль осей будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t, \\ y = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases}$$

Уравнения для скорости, видимо, не потребуются, так как в условии задачи не ставится вопрос о скорости.

Запишем начальные условия:

$$x_0 = 0, \ v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \ y_0 = h, \ v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

С учетом их уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Требование найти именно минимальную скорость означает, что тело попадает на край рва, т. е. в точку B: $t = \tau$, $x = s$, $y = 0$. Тогда

$$\begin{cases} s = v_0 \cos\alpha \cdot \tau, \\ 0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда $$v_0=\frac{s}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h+s\operatorname{tg}\alpha)}}.$$

Задача 9. С высоты h над Землей падает тело. С Земли из точки, находящейся на расстоянии l по горизонтали от линии падения тела, производится выстрел из винтовки так, что пуля вылетает под углом к горизонту со скоростью v_0. Под каким углом должна располагаться винтовка, чтобы пуля попала в тело, если выстрел производится одновременно с началом падения?

α — ?

h
l
v_0

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 9.

Тело *2* движется равноускоренно только вдоль оси Oy, поэтому

$$x_2=\text{const},\quad y_2=y_{02}+v_{02y}t+\frac{a_yt^2}{2}.$$

Сложное движение тела *1* представляет собой совокупность двух простых движений вдоль осей. Вдоль Ox движение равномерное, вдоль Oy — равноускоренное, поэтому

$$x_1=x_{01}+v_{01x}t,\quad y_1=y_{01}+v_{01y}t+\frac{a_{1y}t^2}{2}$$

Определим начальные условия и проекции ускорения на оси. Для тела *1*: $x_{01}=0$, $y_{01}=0$, $v_{01x}=v_0\cos\alpha$, $v_{01y}=v_0\sin\alpha$, $a_{1y}=-g$. Для тела *2*: $x_{02}=l$, $y_{02}=h$, $v_{02}=0$, $a_{2y}=-g$.

Определим дополнительные условия. Для момента попадания пули в цель $t=\tau$. Пуля и тело находятся при этом в одной точке — точке A, следовательно, для точки A имеем: $x_1=x_2=l$, $y_1=y_2$.

С учетом начальных и дополнительных условий уравнения движения для точки A примут вид:

$$\begin{cases} l=v_0\cos\alpha\cdot\tau,\\ h-\frac{g\tau^2}{2}=v_0\sin\alpha\cdot\tau-\frac{g\tau^2}{2}. \end{cases}$$

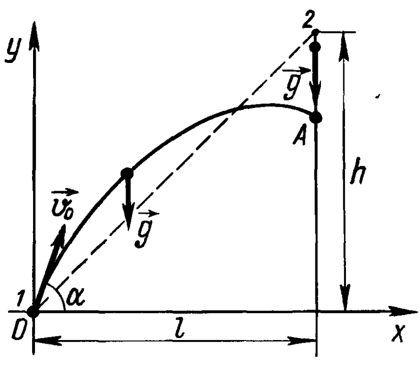

Рис. 9

Решение системы уравнений дает ответ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}.$$

При решении этой задачи надо учесть, что не всегда пуля попадает в падающее тело. При некоторых значениях v_0 пуля не долетит до линии падения тела *2*, т. е. максимальная дальность полета $s_{\max}$ будет меньше l ($s_{\max} < l$).

Найдем, при каком условии пуля попадет в тело *2*. Это возможно, если $s_{\max} > l$ или $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} > l$, т. е. если $v_0 > \sqrt{\frac{lg}{\sin 2\alpha}}$.

Задачу можно решить проще, если связать систему отсчета с падающим телом, однако учащиеся обычно предлагают изложенный выше вариант решения и легче воспринимают его.

Подведем краткий итог сказанному о координатном методе решения кинематических задач.

Для решения кинематической задачи надо, прежде всего, знать начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент. Они явно определяются только после выбора системы отсчета и зависят от того, как она выбрана, поэтому система отсчета выбирается так, чтобы начальные условия могли быть определены наиболее простым образом. Подставив начальные условия в уравнения движения, мы придаем ему конкретный вид, «привязывая» его к системе отсчета.

Кроме этого, в содержании задачи всегда можно найти то, что мы называем «дополнительными условиями». Дополнительные условия — это координаты или скорость точки в какой-либо интересующий нас момент времени движения. Если начальные условия задают начальное состояние, то «дополнительные условия» задают последующее состояние точки. И суть многих задач сводится к тому, чтобы по начальным условиям и выбранному уравнению движения найти последующее состояние в какой-либо момент, т. е. определить, где точка находится или с какой скоростью она движется (или сколько времени она движется до заданного состояния). Дополнительные условия так или иначе заданы текстом задачи, и их надо перевести на язык математических величин. Например, указывается, что движущиеся точки в некоторый момент времени встретились. Это значит, что в какой-то определенный момент времени $t = \tau$ обе точки имеют одинаковые координаты, т. е. $x_1 = x_2$.

Найдя эти дополнительные условия и выразив их математически, надо подставить их в уравнения движения, т. е. уравнения, написанные для любого момента времени, для любой точки траектории, написать для интересующего нас момента времени движения, для определенной точки траектории.

Во многих относительно элементарных задачах решение по сути дела в том и состоит, что, выбрав систему отсчета, определив начальные условия и написав уравнения движения, определяют дополнительные условия и подставляют их в уравнения движения.

Однако в ряде не совсем стандартных задач, которые могут решаться на факультативных занятиях, использование перечисленных выше операций, составляющих алгоритм, не позволяет решить задачу, так как уравнений получается меньше, чем неизвестных. В таких случаях надо отыскать в содержании задачи неиспользованные условия (мы будем называть их «неявными условиями»). Эти неявные условия, как правило, прямо в тексте задачи не отыщешь, и в качестве их могут выступать ограничения, накладываемые на движения, или дополнительные связи между величинами, обусловленные особенностями происходящего движения. В каждой задаче эти неявные условия могут быть совершенно разными, и для их отыскания нельзя дать одного общего рецепта. Тут мышление учащегося не может быть стандартным, и вступает в силу догадка, интуиция, т. е. от мышления по образцу, по алгоритму необходим переход к элементам творческого мышления. Алгоритм и в этих случаях оказывается необходимым, но уже недостаточным, поэтому полезно на факультативных занятиях дополнить ранее сформулированный алгоритм рекомендацией общего плана: *если в результате использования алгоритма получилась система уравнений, число которых меньше числа неизвестных, следует проанализировать особенности движения, чтобы найти неявные условия, выражающие связи между величинами, обусловленные характером движения и возможными ограничениями.*

Итак, анализируя содержание задачи, полезно выделять начальные условия, дополнительные условия и неявные условия.

Приведем примеры таких задач.

Задача 10. Тело *1* начинает двигаться с начальной скоростью $v_{01}=2$ м/с, с постоянным ускорением. Через время $\Delta t=10$ с после начала его движения из той же точки начинает двигаться тело *2* с начальной скоростью $v_{02}=12$ м/с и с тем же ускорением. При каком значении ускорения тело *2* обгонит тело *1*?

a — ?
$v_{01}=2$ м/с
$v_{02}=12$ м/с
$\Delta t=10$ с

Решение

Приняв линию движения за ось Ox и момент выхода из начальной точки первого тела за начальный, напишем уравнения движения:

$$\begin{cases} x_1=v_{01}t+\dfrac{at^2}{2}, \quad v_1=v_{01}+at; \\ x_2=v_{02}(t-\Delta t)+\dfrac{a(t-\Delta t)^2}{2}, \quad v_2=v_{02}+a(t-\Delta t). \end{cases}$$

Очевидно, что одни эти уравнения не позволяют решить задачу, если даже в качестве дополнительного условия принять, что в момент обгона $x_1=x_2$ (уравнений меньше, чем неизвестных). Нужно найти какие-то неявные условия, связанные с особенностью движения.

Известно, что координаты при обгоне одинаковые, а скорости? Тело *2* обгонит тело *1*, если в момент, когда они поравняются, скорости будут подчиняться соотношению $v_2>v_1$, т. е. $v_2-v_1>0$.

Вот это и есть неявное условие, которое в данной задаче надо увидеть и принять во внимание. Отсюда

$$v_{02}+a(t-\Delta t)>v_{01}+at \text{ и } v_{02}-a\Delta t>v_{01},$$

поэтому

$$a<\frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}, \text{ т. е. } a<1 \text{ м/с}^2.$$

Задачу можно решить иначе, связав систему отсчета с телом *1*. Тогда тело *2* будет в этой системе отсчета двигаться равномерно. В момент начала движения тела *2* скорость тела *1* будет $v_{01}+a\Delta t$. Очевидно, что обгон произойдет, если $v_{01}+a\Delta t<v_{02}$, т. е. если $a<\frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}$. Объясним полученный результат. Если бы ускорение было $a\geqslant 1$ м/с^2, то за время $\Delta t=10$ с тело *1* приобрело бы скорость $v_1\geqslant 12$ м/с, т. е. такую же, как начальная скорость тела *2* ($v_{02}=12$ м/с), и при одинаковом ускорении тело *2* никогда бы не смогло догнать тело *1*.

Приведем еще один пример, поясняющий смысл того, что мы называем «неявными условиями».

Задача 11. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить координаты тела h и s в тот момент, когда тело будет иметь скорость v_1.

h, s — ?
v_0
α
v_1

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на рисунке 10. Напишем уравнения движения и, определив начальные условия, подставим их в уравнения:

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t, & v_x=v_0\cos\alpha; \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}, & v_y=v_0\sin\alpha-gt. \end{cases}$$

Определим дополнительные условия.

Для точки A имеем:

$t=\tau,\ x=s,\ y=h,\ v=v_1.$

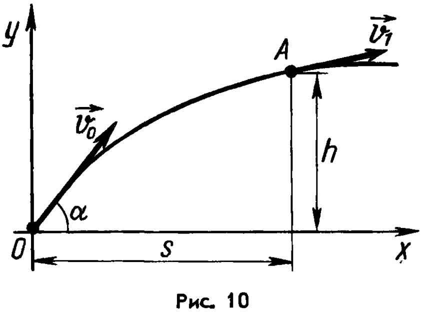

Рис. 10

Получим уравнения:

$$\begin{cases} s = v_0 \cos\alpha \cdot \tau, \ v_x = v_0 \cos\alpha; \\ h = v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2}, \ v_y = v_0 \sin\alpha - g\tau. \end{cases}$$

Очевидно; что в системе четырех уравнений пять неизвестных и нужно еще одно уравнение. Таким является уравнение, устанавливающее связь v_1, v_x, v_y, т. е. $v_1^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Решая систему этих пяти уравнений, найдем h и s.

Итак, сформулированный на первых кинематических задачах алгоритм по мере его применения к решению задач разного типа постепенно все более и более осознается учащимися, у них вырабатывается умение пользоваться им, уверенность в его универсальности и, как показал наш опыт, уверенность в возможности решать на его основе разные задачи.

Вместе с тем учащиеся приобретают умения выполнять общие предписания алгоритма в решении конкретных задач и убеждаются в том, что алгоритм дает лишь общее направление поиска пути решения задачи. Как применить каждое предписание — зависит от конкретных условий задачи и требует серьезной и нестандартной мыслительной деятельности. В результате решения ряда задач по данной теме с использованием агоритма возникает возможность сделать ряд частных конкретизирующих дополнений к нему, показывающих, как использовать каждое предписание. Эти дополнения состоят в следующем:

1. Систему отсчета не обязательно следует связывать с неподвижным телом (Землей). В ряде случаев задача решается проще, если система отсчета связана с движущимся телом.

2. Систему отсчета надо выбирать так, чтобы наиболее простым образом можно было определить начальные условия.

3. Если вид движения на разных его этапах различен, то уравнения следует писать для каждого этапа в отдельности.

4. При выборе системы отсчета надо четко установить, какая точка принимается за начало осей координат и какой момент времени — за начальный.

5. В задачах на движение системы материальных точек уравнения пишутся для каждой точки в отдельности, и если они начали двигаться неодновременно, то для каждой точки — свое время.

6. В решении кинематических задач всегда надо выявить начальные условия, перевести на язык физических величин дополнительные условия, определяющие положение и скорость тела в какой-либо последующий момент времени, а если число уравнений будет недостаточным для нахождения искомой величины, то надо попытаться выявить дополнительные связи и соотношения, так называемые неявные условия.

7. В задачах о движении тел, брошенных как угодно вблизи Земли, любое тело (при отсутствии сопротивления) всегда движется с вертикально направленным ускорением $\vec{g}$, вне зависимости от модуля и направления начальной скорости.

В порядке упражнений в применении алгоритма могут быть решены из стабильного задачника задачи №№ 23, 63, 65, 73, 79, 86, 191, 203, 212[1].

§ 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи по динамике в школьном курсе физики могут решаться либо на основе законов Ньютона, либо с использованием законов сохранения энергии и импульса. В данном разделе мы рассмотрим решение динамических задач на основе законов Ньютона.

Для овладения методом решения этих задач учащиеся должны усвоить следующее:

— понятие силы как вектора, имеющего абсолютное значение (модуль), направление и точку приложения;

— понятие ускорения как вектора, который в ускоренном прямолинейном движении направлен так же, как и скорость, в замедленном — противоположно ей, но всегда направлен так же, как и вектор изменения скорости; в движении по окружности с постоянной по модулю скоростью — по радиусу к центру окружности;

— формулировки и физическую сущность трех законов Ньютона;

— типы сил, рассматриваемых в механике (силы тяготения, упругости, трения);

— законы, показывающие, от чего зависят силы того или иного типа, и то, как определяется направление сил каждого типа.

При решении задач по динамике учащиеся сталкиваются с рядом трудностей, связанных с формальным усвоением понятий и законов динамики, и именно решение задач позволяет обеспечить их глубокое, неформальное усвоение.

Одна из основных трудностей состоит в определении того, какие силы действуют на тело. Учащиеся либо упускают из виду действие какой-либо силы, либо прикладывают к телу «лишние» силы, не обусловленные реальным взаимодействием тел.

Иногда учащиеся забывают, что ускорение обусловлено всегда равнодействующей всех сил, и считают, что ускорение сообщает лишь та сила, которая направлена в сторону ускорения. До сих пор бытует еще представление о неких «ускоряющих» силах (как будто есть силы, которые не сообщают ускорения). Причем иногда «ускоряющую» силу вводят как некую самостоятельную силу, не обусловленную каким-либо реальным действием на точку других тел. Примером такого заблуждения является встречающееся еще утверждение о том, что на тело, скатывающееся с наклонной плоскости, действует, помимо сил тяжести, реакции опоры и трения, еще и «скатывающая» сила, которая и является «ускоряющей» силой. Для

---

[1] Здесь и далее номера задач указываются из сборника задач по физике А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича (М.: Просвещение, 1984).