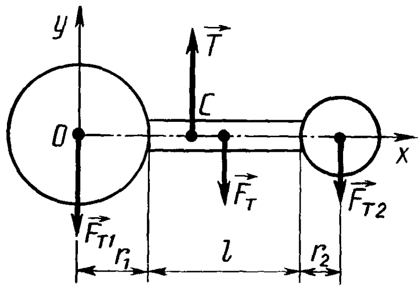

Рис. 28

$$F_{\text{т}2}(r_1+l+r_2)+F_{\text{т}}\left(r_1+\frac{l}{2}\right)-Tx_C=0,$$
$$-F_{\text{т}1}-F_{\text{т}2}-F_{\text{т}}+T=0$$

(здесь x_C— координата центра тяжести).
Отсюда

$$T=F_{\text{т}1}+F_{\text{т}2}+F_{\text{т}},\quad x_C=\frac{m_2(r_1+r_2+l)+m(r_1+\frac{l}{2})}{m_1+m_2+m}.$$

Задачу можно решить, используя лишь второе условие равновесия.

Таким образом, решение приведенных выше задач позволяет сформулировать ряд дополнений к основным предписаниям алгоритма, в которых раскрывается порядок выполнения этих предписаний.

1. Если направление силы реакции неизвестно, то можно выбрать его предположительно и по знаку проекций судить о правильности определения направления силы реакции, либо же воспользоваться теоремой о трех силах.

2. Для определения центра тяжести тела надо предположить его месторасположение и считать, что в этой точке тело подвешено и потому будет находиться в равновесии, что позволяет применить условия равновесия.

3. В ряде задач можно использовать лишь второе условие равновесия, написав дважды его уравнение — сначала для одной оси, а потом считая, что ось проходит через другую точку.

В качестве упражнений в применении алгоритма могут быть использованы задачи из сборника задач А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича №№ 301, 303, 321, 325, 334.

§ 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Для успешного решения задач с использованием закона сохранения импульса учащиеся должны в первую очередь усвоить следующее:

1. Решение основной задачи механики в ряде случаев упрощается, если пользоваться не законами динамики, а выведенными из них следствиями — законами сохранения импульса и энергии,

которые избавляют от необходимости анализировать и учитывать силы, с которыми взаимодействуют тела (эти силы при взаимодействии могут сложным образом меняться, что и осложняет применение законов динамики).

2. Важнейшей динамической характеристикой материальной точки является величина «импульс точки», которая служит мерой движения и позволяет написать второй закон динамики для точки в виде $\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$.

3. Для системы материальных точек существуют два закона, связанных с понятием импульс:

а) $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ — закон изменения импульса системы,

б) $\Delta\vec{p} = 0$ — закон сохранения суммарного импульса системы.

4. Закон $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ по форме совпадает с основным законом динамики в его ньютоновской формулировке, но в него входит уже не изменение импульса точки, а изменение суммарного импульса системы точек, и не равнодействующая всех сил, приложенных к точке, а векторная сумма внешних сил, действующих на тела системы (главный вектор внешних сил), которую нельзя отождествлять с равнодействующей.

5. Закон изменения импульса справедлив всегда для механической системы материальных точек; закон сохранения импульса, строго говоря, справедлив лишь для замкнутых систем.

6. Поскольку замкнутая система — это идеализация, то в реальных случаях закон сохранения импульса применим в векторной форме лишь для кратковременных (ударных) взаимодействий, при которых внутренние силы много больше внешних, каковыми потому и можно пренебречь.

В случае, если система незамкнутая, но сумма проекций внешних сил на какую-либо ось равна нулю $-F_x = 0$, то $\Delta p_x = 0$ и $p_x = \text{const}$, т. е. сохраняется сумма проекций импульсов на данную ось (что очень часто и имеет место).

Таков необходимый минимум знаний, обеспечивающий успешность решения задач, связанных с понятием «импульс». Однако в школьном курсе физики закон изменения импульса системы не изучается. И тем не менее мы сочли необходимым включить этот закон в перечень необходимых знаний, чтобы этот перечень был целостным и полным и учитель не упускал бы из виду данный закон. К тому же (и это — главное) закон изменения импульса системы, бесспорно, должен изучаться на факультативных занятиях, что позволит учащимся лучше понять границы применимости закона сохранения импульса и решать с его использованием более широкий класс задач. В связи с этим приведем вывод, позволяющий учащимся осознать существование двух законов, связанных с понятием «импульс». Этот вывод может быть дан на факультативных занятиях по механике.

Пусть имеется система двух материальных точек с массами m_1 и m_2, которые движутся со скоростями $\vec{v}_{01}$ и $\vec{v}_{02}$ и взаимодействуют друг с другом с силами $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$ (внутренние силы). Пусть внешние силы, действующие на точки, соответственно $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

В результате взаимодействия скорости точек изменились, став $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Напишем для каждой точки второй закон Ньютона:

$$(\vec{F}_1+\vec{f}_{12})\Delta t=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{01},$$

$(\vec{F}_2+\vec{f}_{21})\Delta t=m_2\vec{v}_2-m_2\vec{v}_{02}$ (здесь Δt — время взаимодействия). Сложим почленно эти уравнения, учтя, что по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}$, а поэтому $\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0$.

В результате получим

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}).$$

Обозначим суммарный импульс системы до взаимодействия $\vec{p}_1=m_1\vec{v}_{01}+m_2\vec{v}_{02}$, а после взаимодействия — $\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$. Тогда

$$(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t=\vec{p}_2-\vec{p}_1,$$

где $\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta p$ — изменение суммарного импульса всей системы, а $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}$ — векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему. Итак, имеем:

$$\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}.$$

Полученное выражение называется законом (в механике говорят «теоремой») изменения суммарного импульса системы. Его смысл в том, что суммарный импульс системы изменяется только под действием внешних сил и тем в большей мере, чем больше сумма сил и время их действия.

Пусть система замкнутая, т. е. на принадлежащие ей тела внешние силы не действуют. Тогда $\vec{F}=0$ и $\Delta\vec{p}=0$, следовательно, $\vec{p}_1=\vec{p}_2$ или $\vec{p}=\text{const}$, т. е. имеет место закон сохранения суммарного импульса системы.

При решении задач по данной теме у школьников обычно возникают следующие трудности, связанные:

1) с тем, как выделить систему взаимодействующих тел и определить, какие силы являются в данной системе внутренними, а какие — внешними;

2) с тем, когда можно пользоваться законом сохранения импульса, а когда нет;

3) с выбором тех состояний системы, в которых можно и целесообразно сравнивать импульсы;

4) с расчленением стадии взаимодействия тел системы и стадии движения тел после взаимодействия (это ярко проявляется при анализе известных опытов по взаимодействию тележек, расталкиваемых пружиной).

В алгоритме и комментариях к нему должны быть указания, направленные на предотвращение этих трудностей.

Подбор задач по теме, типы задач также определяются необходимостью уменьшить эти трудности и раскрыть те положения, которые составляют существо закона сохранения импульса и определяют границы его применимости.

В целом среди задач по теме «Закон сохранения импульса» можно выделить следующие типы задач, в которых надо найти:

1) скорости тел незамкнутой системы, для которой суммарный импульс сохраняется только для движения вдоль какой-либо одной оси;

2) скорости тел при их ударном взаимодействии на основе закона сохранения импульса (система может считаться приблизительно замкнутой);

3) не только скорости, полученные в результате взаимодействия, но и другие величины (например, перемещение), характеризующие движение после взаимодействия тел выделенной системы (в таких задачах помимо закона сохранения импульса приходится применять и другие физические законы).

Последовательность задач, решаемых на уроках, определяется последовательностью перечисленных типов задач, а их число зависит от уровня обученности учащихся данного класса, но, думается, не может быть меньшим, чем то, что приведено в данном параграфе.

Сконструировать на уроке алгоритм на основе решения одной задачи трудно ввиду обилия положений, которые при этом надо обосновать; лучше при этом использовать не одну сложную задачу, а две относительно простые.

При решении первой задачи надо показать учащимся, как выделять систему взаимодействующих тел, определять внешние и внутренние силы, выделять состояния, в которых сравниваются импульсы. При этом целесообразно начать с такой задачи, решение которой позволило бы показать применение закона сохранения суммы проекций импульса вдоль одной оси.

Задача 1. В тележку с песком массой m_1, движущуюся горизонтально со скоростью v_1 (трение отсутствует), падает по вертикали камень массой m_2 со скоростью v_2. Найти скорость тележки после застревания камня в песке.

v_1' — ?
m_1
v_1
m_2
v_2

Решение

Так как при внедрении камня в песок силы взаимодействия меняются сложным образом, то использовать второй закон Ньютона для нахождения ускорения и затем скорости тележки было бы затруднительно. Поэтому логично попытаться решить задачу на основе закона сохранения импульса.

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 29. В качестве системы взаимодействующих тел выберем тележку и камень. Естественно, что оба эти тела взаимодействуют и с Землей, но именно у тележки и камня в результате их взаимодействия меняется движение.

Далее, чтобы решить вопрос о возможности использования закона сохранения импульса, надо установить, является ли система замкнутой, а для этого надо выяснить, какие силы действуют на тела системы и какие из них являются внутренними, а какие — внешними. Очевидно, что силы взаимодействия камня и тележки являются внутренними, а силы тяжести тележки ($\vec{F}_{т1}$), камня ($\vec{F}_{т2}$), реакция опоры ($\vec{N}$) — внешними. Эти последние нельзя считать пренебрежимо малыми, следовательно, система незамкнутая и законом сохранения импульса в векторной форме пользоваться нельзя. Однако нетрудно видеть, что проекции внешних сил на ось Ox равны нулю, поэтому нет никаких динамических причин, которые могли бы изменить импульс системы вдоль оси Ox, следовательно, можно написать закон сохранения проекций импульсов на ось Ox. А для его применения надо сравнить импульсы системы тел в два последовательных момента времени (в двух состояниях) и в качестве таковых, естественно, взять состояние, предшествующее взаимодействию, и состояние движения непосредственно после взаимодействия.

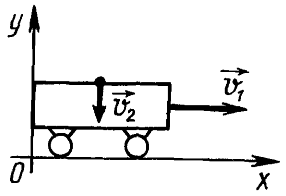

Рис. 29

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у тележки	$m_1\vec{v}_1$	$m_1\vec{v}_1{}'$
у камня	$m_2\vec{v}_2$	$m_2\vec{v}_1{}'$

Так как суммарный импульс системы вдоль оси Ox сохраняется, то

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=(m_1+m_2)v'_{1x}.$$

Отсюда

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v'_1 \text{ и } v'_1=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Анализ этой задачи позволяет сделать вывод, что, решая задачи на основе законов, связанных с понятием «импульс», надо выбрать систему отсчета, выделить систему взаимодействующих тел, определить, какие силы являются внутренними, а какие — внешними, определить импульсы тел до и после взаимодействия, и если система незамкнутая, но сумма проекций внешних сил на одну из осей равна нулю, то будет сохраняться сумма проекций импульсом на эту ось. Все эти утверждения составляют предписания алгоритма, полная формулировка которого может быть дана после решения задачи на закон сохранения импульса, который можно применять, если можно пренебречь внешними силами в сравнении с внутренними.

Вообще говоря, утверждение о сохранении суммы проекций импульса вдоль оси Ox не является достаточно убедительным и принимается учащимися чисто интуитивно. Но в основном курсе физики другого выхода нет. На факультативных же занятиях это утверждение можно обосновать, используя закон изменения импульса. Действительно, согласно этому закону

$$(m_1+m_2)\vec{v}'_1-(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)=(\vec{F}_{т1}+\vec{F}_{т2}+\vec{N})\Delta t,$$

где Δt — время взаимодействия.

В проекциях на ось Ox получим:

$$(m_1+m_2)v'_{1x}-(m_1v_{1x}+m_2v_{2x})=0.$$

В проекциях на ось Oy получим:

$$-m_2v_2=(N-F_{т1}-F_{т2})\Delta t,$$

т. е. $N\neq F_{т1}+F_{т2}$ и вдоль этой оси суммарный импульс не сохраняется.

Задача 2. Горизонтально летящая пуля массой 10 г, двигаясь со скоростью 100 м/с, попадает в лежащий на горизонтальном столе брусок массой 100 г и, пробив его, движется со скоростью 90 м/с. Найти скорость бруска после пробивания его пулей. Сравнить внешние силы с внутренними, если время движения пули в бруске 0,001 с, а коэффициент трения между бруском и столом 0,1.

v_2' — ?
$m_1=10$ г
$m_2=100$ г
$v_1=100$ м/с
$v_1'=90$ м/с
$v_2=0$
$\mu=0,1$
$\Delta t=0,001$ с

Решение

Будем анализировать процессы, происходящие в ситуации, описанной в задаче, опираясь на те предписания, которые были сделаны на основе решения предыдущей задачи.

Выберем систему отсчета, как указано на рисунке 30. В качестве системы взаимодействующих тел выберем систему «брусок — пуля». Силы, с которыми пуля действует на брусок, а брусок на пулю, будут внутренними; силы тяжести пули и бруска, сила реакции стола, сила трения, действующая на брусок,— внешние.

На первый взгляд внешние силы немалы, система незамкнутая, следовательно, закон сохранения импульса неприменим.

Двигаясь в бруске, пуля испытывает силу сопротивления, которая меняется по неизвестному закону с изменением скорости, поэтому найдем среднюю силу, с которой брусок действует на пулю $\vec{F}_{ср}$. Кроме того, на пулю действует сила тяжести ее — $\vec{F}_{т1}$. Тогда по закону Ньютона

$$(\vec{F}_{ср}+\vec{F}_{т1})\Delta t=\Delta\vec{p},$$

где $\Delta\vec{p}$ — изменение импульса пули, который менялся от значения $m_1\vec{v}_1$ до значения $m_1\vec{v}_1'$.

Итак,

$$(\vec{F}_{ср}+\vec{F}_{т1})\Delta t=m_1\vec{v}_1'-m_1\vec{v}_1,$$

откуда в проекциях на ось имеем:

$$-F_{ср}\Delta t=m_1v_1'-m_1v_1;$$

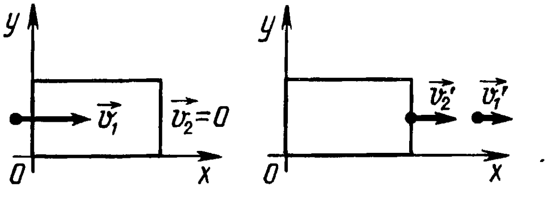

Рис. 30

и тогда

$$F_{\text{ср}} = \frac{m(v_1 - v_1')}{\Delta t} = 100 \text{ Н}.$$

С такой же силой пуля действует на брусок и изменяет его движение. Найдем значения внешних сил:

сила тяжести пули $F_{\text{т}1} = m_1 g = 0{,}1$ Н,

сила тяжести бруска $F_{\text{т}2} = m_2 g = 1$ Н,

сила реакции опоры в период взаимодействия бруска и пули $N = (m_1 + m_2)g = 1{,}1$ Н,

сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = 0{,}11$ Н.

Сравнение значений $F_{\text{ср}}$ с $F_{\text{т}1}$, $F_{\text{т}2}$, N и $F_{\text{тр}}$ показывает, что внешние силы много меньше внутренних. Относительно большое значение внутренней силы $F_{\text{ср}}$ связано с тем, что время взаимодействия очень мало. Такое кратковременное взаимодействие тел называется ударным. К ударным взаимодействиям относятся такие явления, как столкновение движущихся тел и частиц, разрыв тела на части и т. д.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: *при кратковременных (ударных) взаимодействиях тел внутренние силы во много раз превышают внешние, каковыми можно поэтому пренебречь и, считая систему замкнутой, применить закон сохранения импульса.*

Воспользуемся этим законом для решения данной задачи.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у пули	$m_1\vec{v}_1$,	$m_1\vec{v}_1'$,
у бруска	0,	$m_2\vec{v}_2'$.

Тогда закон сохранения импульса системы запишется в виде:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' - m_1\vec{v}_1 = 0.$$

В проекциях на ось получим:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' - m_1 v_1 = 0.$$

Отсюда

$$v_2' = \frac{m_1(v_1 - v_1')}{m_2} = 1 \text{ м/с}.$$

Проанализировав с учащимися основные шаги решения этих двух задач, можно дать окончательную формулировку алгоритма решения задач с использованием закона сохранения импульса:

1. Выбрать систему отсчета.

2. Выделить систему взаимодействующих тел и выяснить, какие силы для нее являются внутренними, а какие — внешними.

3. Определить импульсы всех тел системы до и после взаимодействия.

4. Если в целом система незамкнутая, но сумма проекций сил на одну из осей равна нулю, то следует написать закон сохранения лишь в проекциях на эту ось.

5. Если внешние силы пренебрежимо малы в сравнении с внутренними (как в случае удара тел), то следует написать закон сохранения суммарного импульса в векторной форме и перейти к скалярной.

На факультативных занятиях к этим предписаниям алгоритмов следует добавить еще одно:

если на тела системы действуют внешние силы и ими нельзя пренебречь, то следует написать закон изменения импульса в векторной форме и перейти к скалярной.

Таким образом, алгоритм на этих двух задачах введен. Теперь надо на ряде задач показать, как применять предписания алгоритма, обеспечить систему упражнений, закрепляющую знание алгоритма, и внести ряд дополнений к алгоритму.

Задача 2 может быть использована для обоснования ряда важных положений, связанных с применением закона сохранения импульса и раскрытием его смысла.

Прежде всего полезно показать, что закон сохранения импульса включает в себя утверждение о том, что на сколько уменьшился импульс одного тела, на столько он увеличился у другого тела, т. е. в процессе взаимодействия произошла передача не скорости и не массы, а именно импульса, который тем самым является важнейшей самостоятельной характеристикой движущегося тела, а не просто комбинацией величин m и v.

Выясним, на сколько изменился импульс пули и бруска, и сравним эти величины.

Изменение импульса пули будет:

$$\Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 < 0,$$

а бруска —

$$\Delta p_2 = m_2 v_2' - 0 = \frac{m_2 m_1 (v_1 - v_1')}{m_2} = m_1 (v_1 - v_1') > 0.$$

Очевидно, что изменения импульса по модулю одинаковы, а различия в знаках означают, что импульс пули уменьшился, а импульс бруска на столько же увеличился, значит, произошла передача импульса от одного тела к другому.

Дальнейшее использование этой задачи может состоять в том, что на основе ее можно показать, что в случае, если надо определить не скорость тела после его взаимодействия, а его дальнейшее движение, надо помимо использования закона сохранения импульса воспользоваться другими физическими законами. При этом очень важно показать учащимся необходимость разграничения двух стадий движения — стадии взаимодействия тел и стадии их последующего движения после взаимодействия.

Для этого дополним условие задачи требованием найти перемещение бруска после его пробивания пулей.

Анализируя происходящие процессы, можно выделить две стадии: первая — это пробивание пулей бруска и их взаимодействие, в результате которого происходит передача импульса от пули к бруску и он приобретает скорость v_2'. Вторая стадия — это движение бруска, при котором пуля уже не действует на брусок, а брусок движется замедленно в результате действия на него силы трения со стороны поверхности, по которой осуществляется перемещение (здесь импульс уже, конечно, меняется).

Очевидно, что нахождение перемещения бруска при замедленном его движении до остановки осуществляется на основе уравнения кинематики

$$0 - v_{2x}'^2 = 2a_x s_x$$

и уравнения динамики, позволяющего найти ускорение:

$$\vec{F}_{т2} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}.$$

В результате получаем, что

$$a = \mu g, \text{ а } s = \frac{v_2'^2}{2\mu g}.$$

Отсюда вытекает дополнение к алгоритму: если надо определить не скорости тел после взаимодействия, а их последующее движение, то кроме уравнений, связанных с понятием «импульс», следует использовать другие физические законы (уравнения динамики, кинематики, энергетические законы) и полученную систему уравнений решить относительно искомой величины.

Решение последующих задач должно быть направлено на упражнения в применении алгоритма и раскрытие некоторых положений, показывающих, как выполнять сформулированные ранее предписания алгоритма.

Прежде всего следует показать применение закона сохранения проекции импульса. Для этого полезна следующая задача.

Задача 3. Конькобежец массой m_1, стоя на льду, бросает кусок льда массой m_2 со скоростью v_2 под углом α к горизонту (рис. 31). Определить скорость конькобежца после броска.

v_1 — ?	Решение
m_1 m_2 v_2 α	Выбрав систему отсчета, как указано на чертеже, и выделив систему взаимодействующих тел (человек — кусок льда), определяем импульсы тел.

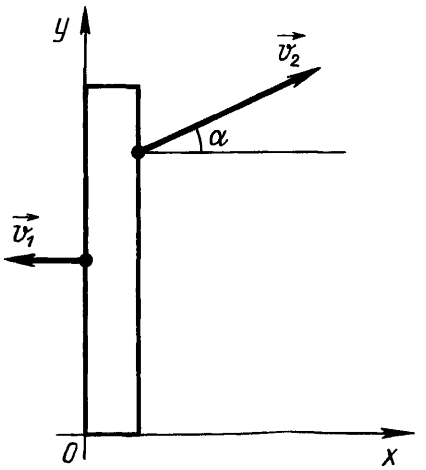

Рис. 31

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у человека	0	$m_1\vec{v}_1$
у куска льда	0	$m_2\vec{v}_2$

Внутренние силы — это силы взаимодействия человека и куска льда, направленные по линии бросания. К внешним силам относятся силы тяжести человека и куска льда ($\vec{F}_т$) и сила реакции льда ($\vec{N}$) (силой трения можно пренебречь). Обычно учащиеся считают, что и в период броска $F_т = N$, что создает у них иллюзию применимости закона сохранения импульса. Но обращает на себя внимание то, что импульсы человека и куска льда после толчка направлены не по одной прямой, а потому $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \neq 0$, как должно бы быть в соответствии с законом сохранения. Следовательно, в данном случае надо применять закон сохранения проекций импульса:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \text{ и } v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \cos\alpha.$$

Далее надо особо подчеркнуть, что закон сохранения носит векторный характер. Для разъяснения этой мысли полезно решить следующую задачу.

Задача 4. Шар массой 1 кг, двигаясь по столу со скоростью 5 м/с, ударился о покоящийся шар с такой же массой, который приобрел при этом скорость 3 м/с, направленную под углом $\alpha_1 = 53°$ к линии движения первого шара (удар не лобовой). Определить модуль и направление скорости первого шара графически, считая удар упругим.

v_1', α_2 — ?

$v_1 = 5$ м/с
$m_1 = m_2 = 1$ кг
$\alpha_1 = 53°$
$v_2' = 3$ м/с

Решение

Свяжем начало системы отсчета с точкой, в которой произошел удар, и направим оси, как указано на чертеже (рис. 32). Силы, с которыми взаимодействуют шары, — внутренние; силы тяжести, трения — внешние.

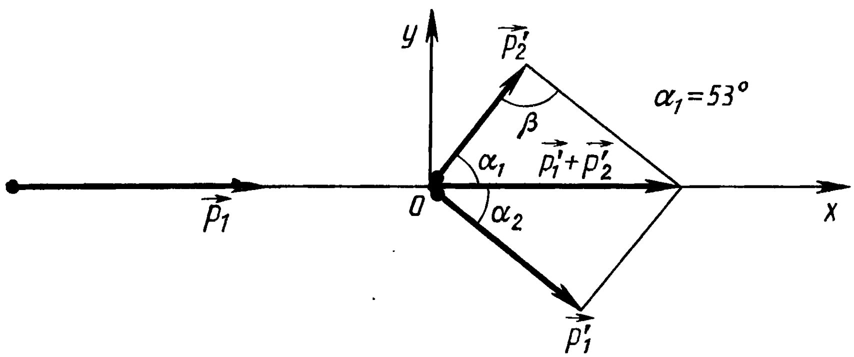

Рис. 32

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у шара *1*	$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$	$\vec{p}_1' = m\vec{v}_1'$
у шара *2*	0	$\vec{p}_2' = m\vec{v}_2'$

Взаимодействие носит ударный характер, поэтому применим закон сохранения импульса. Так как задача должна решаться геометрически, то переходить к скалярной форме нет нужды, и поэтому, изобразив векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2'$ в масштабе с учетом угла α_1, можно найти $\vec{p}_1'$. Действительно, после удара суммарный импульс системы $\vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ должен быть таким же, каким он был до удара и по модулю, и по направлению, т. е. равным $\vec{p}_1$, следовательно, именно векторная сумма импульсов сохраняется и по модулю, и по направлению. Поэтому, построив на чертеже вектор $\vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, равный $\vec{p}_1$ по модулю и направленный так же, как $\vec{p}_1$, и считая его диагональю параллелограмма, сторонами которого являются $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$, надо построить на этой диагонали и на известной стороне $\vec{p}_2'$ параллелограмм, другая сторона которого даст $\vec{p}_1'$. Построение показывает, что угол, под которым разлетаются шары, будет прямым, т. е. $\alpha_2 = 90° - 53° = 37°$, а модуль $v_1' = 4$ м/с.

Задача полезна тем, что в ее решении явно выступает сохранение суммарного импульса системы и по модулю, и по направлению, т. е.

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1, \text{ но } p_1' + p_2' \neq p_1.$$

При повторении механики, когда учащиеся познакомятся с теоремой косинусов, полезно решить эту задачу уже более строго, используя для решения и закон сохранения импульса, и закон сохранения энергии.

По закону сохранения импульса $m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$ и $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$, т. е. $\vec{v}_1$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ и углами $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и β. По теореме косинусов

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2' \cos\beta.$$

По закону сохранения механической энергии, справедливому в данном случае, так как в системе действуют только потенциальные силы, имеем:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} \text{ и } v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Подставляя значение v_1^2 в теорему косинусов, получим, что $2v_1'v_2' \cos\beta = 0$, что возможно, если $\beta = 90°$, а следовательно, и $\alpha = 90°$, т. е. шары разлетаются под прямым углом.

Указание алгоритма «выбрать систему отсчета» учащиеся подчас выполняют формально и в ходе решения забывают о том, в какой системе отсчета ведется рассмотрение процессов. Чтобы показать, как важно учитывать в ходе решения выбранную вначале систему отсчета, полезно решить следующую задачу.

Задача 5. Человек массой m_1 за время Δt переходит с кормы на нос покоившейся первоначально лодки длиной l и массой m_2. Найти скорость, которую в результате этого приобретет лодка, если сопротивлением воды можно пренебречь.

v_2 — ?
m_1 m_2 Δt l

Решение

Выберем систему отсчета, как указано на чертеже (рис. 33), связав ее с Землей. Будем рассматривать систему «человек — лодка». Силы, с которыми взаимодействуют эти тела,— внутренние. Кроме них на тела системы действуют внешние силы (силы притяжения к Земле, выталкивающая сила), т. е. система незамкнутая. Однако проекции этих сил на ось Ox равны нулю, и потому для движения вдоль этой оси можно написать закон сохранения в проекциях импульсов на эту ось.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у человека	0	$m_1\vec{v}_1$
у лодки	0	$m_2\vec{v}_2$

Обычно учащиеся далее пишут:

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=0 \text{ и } m_1v_1-m_2v_2=0,$$

считая, что лодка приобрела скорость $\vec{v}_2$, направленную противоположно $\vec{v}_1$ (что, конечно, верно), но полагая при этом что $v_1=\frac{l}{\Delta t}$, что неверно, так как $\frac{l}{\Delta t}$ — это скорость человека относительно лодки, а $\vec{v}_2$ — это скорость лодки относительно Земли, т. е. в уравнении закона сохранения оказались величины, отсчитываемые относительно разных систем отсчета.

Правильное решение должно опираться на закон сложения скоростей:

$$v_x=v_{1x}+v_{2x},$$

откуда

$$v=v_1-v_2,$$

где v — скорость человека относительно Земли. Тогда по закону сохранения проекций импульса имеем:

$$m_1v_x+m_2v_{2x}=0,$$

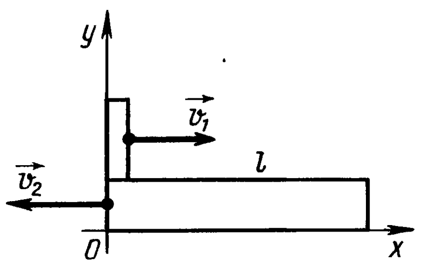

Рис. 33

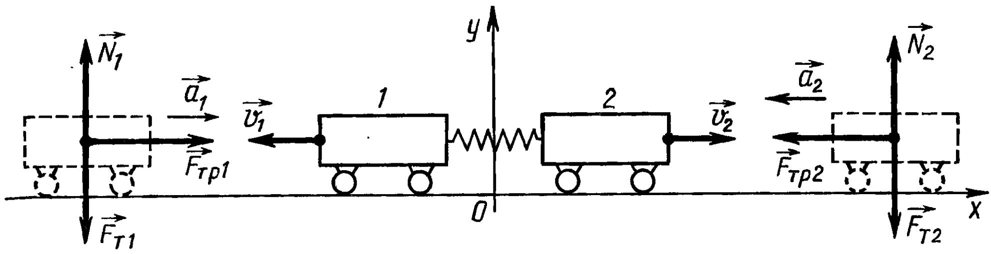

Рис. 34

где все импульсы отсчитываются относительно одной и той же системы отсчета, связанной с Землей.

Далее получим:

$$m_1(v_1 - v_2) - m_2 v_2 = 0 \text{ и } v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)\Delta t}.$$

Итак, из решения задачи следует вывод, дополняющий алгоритм: *при использовании закона сохранения импульса необходимо, чтобы все величины, входящие в него, были отсчитаны относительно одной и той же системы отсчета.*

Чтобы учащиеся научились разграничивать стадию взаимодействия тел системы и стадию последующего движения после взаимодействия, полезно решить задачу о расталкивании тележек пружиной, описанная в которой ситуация используется в учебнике «Физика-8» для введения понятия массы. Эта задача отнюдь не всегда понимается и решается верно, что мешает осознанию соответствующего этой задаче демонстрационного эксперимента, обычно используемого на уроках.

Задача 6. Две тележки массами m_1 и m_2, где $m_2 = 3m_1$, связаны сжатой пружиной, которая стянута нитью. Определить отношение перемещений, которые пройдут тележки после пережигания нити, если коэффициент трения о поверхность стола μ.

$\frac{s_1}{s_2}$ — ?

$m_2 = 3m_1$

μ

Решение

Выберем систему отсчета, как показано на чертеже (рис. 34). В системе двух взаимодействующих тележек силы, с которыми пружина действует на тележки, будут внутренними, силы тяжести ($\vec{F}_{т1}$ и $\vec{F}_{т2}$), силы трения ($\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$) и реакции опоры ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$) будут внешними. Так как время взаимодействия тележек посредством пружины мало, то внешними силами можно пренебречь в сравнении с внутренними и применять закон сохранения импульса к процессу их взаимодействия.

Импульсы тел	до взаимодействия	после взаимодействия
у тележки *1*	0	$m_1\vec{v}_1$
у тележки *2*	0	$m_2\vec{v}_2$

Тогда имеем:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0 \text{ и } -m_1v_1+m_2v_2=0.$$

Следовательно, в результате взаимодействия тележки приобрели скорости v_1 и v_2, обратно пропорциональные массам. Этим исчерпывается первая стадия процесса. Далее тележки движутся, не взаимодействуя друг с другом, испытывая действие сил трения, вследствие чего их движение будет замедленным и, пройдя соответственно расстояния s_1 и s_2, они остановятся. Это — вторая стадия описанного в задаче процесса.

Чтобы найти перемещение тележек в равнозамедленном движении, надо знать ускорения a_1 и a_2, которые тележки приобретают после того, как прекратилось действие пружины, а для этого воспользуемся законом Ньютона, написав его для каждой тележки:

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{т}1}+\vec{N}_1+\vec{F}_{\text{тр}1}=m_1\vec{a}_1, \\ \vec{F}_{\text{т}2}+\vec{N}_2+\vec{F}_{\text{тр}2}=m_2\vec{a}_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}1}=m_1a_1, \quad F_{\text{тр}2}=m_2a_2,$$

а так как $F_{\text{тр}}=\mu N=\mu mg$, то $a_1=a_2=\mu g$.

Перемещения тележек найдем, зная ускорение, начальные скорости (v_1 и v_2) и их конечную скорость, равную нулю, пользуясь уравнением кинематики

$$v_x^2-v_{0x}^2=2a_xs_x:$$

$$\begin{cases} 0-v_{1x}^2=2a_xs_{1x}, \\ 0-v_{2x}^2=2a_xs_{2x}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -v_1^2=-2as_1, \\ -v_2^2=-2as_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{v_1^2}{v_2^2}.$$

А так как по закону сохранения импульса $\frac{v_1}{v_2}=\frac{m_2}{m_1}$, то

$$\frac{s_1}{s_2}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2=9.$$

Полезно подчеркнуть, что в процессе взаимодействия тележки получают ускорения a_1' и a_2', связанные с соотношением $\frac{a_1'}{a_2'}=\frac{m_2}{m_1}$, являющимся следствием второго и третьего законов Ньютона. Ускорения же, которые они приобретают на второй стадии процесса,— a_1 и a_2 — вызваны действием сил трения и одинаковы для обоих тел. В известных опытах с взаимодействием тележек об ускорениях a_1' и a_2' судят по приобретенным при взаимодействии скоростям $v_1=a_1't$ и $v_2=a_2't$ (t — время взаимодействия), а скорости, как было показано, определяются массами m_1 и m_2 и могут быть оценены по времени прохождения тележками одинаковых перемещений, проходимых до упоров, равноудаленных от начальных положений тележек (при этом трение должно быть пренебрежимо мало).

Итак, в результате решения задач, предлагаемых учащимся после того, как сформулирован алгоритм, можно сделать следующие добавления, примечания к алгоритму, уточняющие его основные предписания:

1. Применяя закон сохранения импульса, надо следить за тем, чтобы импульсы всех тел, входящие в уравнения, были отсчитаны относительно одной и той же системы отсчета.

2. Если в задаче требуется не только определить скорость какого-либо тела системы после взаимодействия, но и найти перемещение этого тела в результате приобретенной при взаимодействии скорости, то надо четко разграничивать два этапа описанного в задаче механического процесса: первый — этап взаимодействия, в результате которого тела приобретают некоторые скорости; второй — этап движения после прекращения взаимодействия тел выделенной системы. При этом помимо уравнений, связанных с понятием «импульс», надо использовать другие физические законы (уравнения динамики, кинематики, энергетические законы).

Приведенные выше задачи служат обоснованием основных положений, связанных с законами изменения и сохранения импульса.

Все последующие задачи должны обеспечивать тренировку учащихся в применении данных положений. К числу их относятся задачи из задачника А. П. Рымкевича и П. А. Рымкевича №№ 347, 349, 350, 353, 354 и др.

§ 6. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Успех в решении задач энергетическим методом во многом определяется тем, как введены энергетические понятия в теоретическом плане. Поэтому прежде всего рассмотрим, какие недостатки в усвоении энергетических понятий и их применении к решению задач обнаруживаются у учащихся и какой должна быть для их предотвращения трактовка этих понятий при их теоретическом рассмотрении на уроках.

К числу недостатков в понимании и применении понятий «работа» и «энергия» относится следующее:

1. Так как при изложении этих вопросов обычно не вводится понятие механического состояния, то не проводится и разграничение понятий энергии как характеристики состояния и работы как характеристики процесса. Отсюда — представления учащихся о «запасе работы», толкование величины ΔA как «изменения работы». В связи с этим при решении задач энергетическим методом учащиеся часто не понимают, что прежде всего надо разумно выбрать два состояния и сравнить полную механическую энергию в них.

2. Так как обычно учащимся не дается понятие потенциальных сил, то они нечетко представляют, что такое потенциальная энергия и на вопрос: «Когда тела обладают потенциальной энергией?» — часто отвечают: «Когда тело поднято на некоторую высоту», не понимая, что и будучи опущенным в яму оно будет обладать потенциальной энергией по отношению к соответствующим образом