

Следует обратить внимание на то, что энергию связи нельзя представить в виде степенного разложения по потенциалу взаимодействия  $\lambda\psi_k^2$ . Таким образом, найденное нами состояние никак нельзя получить с помощью теории возмущений. Заметим также, что величина  $a_k$  оказывается наибольшей на поверхности Ферми и падает при больших энергиях. В нашей модели она точно обращается в нуль при энергиях, превышающих энергию обрезания:  $\epsilon_k > E_c$ . (Опять-таки  $\epsilon_k$  отсчитывается от энергии Ферми.) Можно показать, что энергия связи  $E$  для состояний с отличным от нуля полным импульсом пары имеет меньшую отрицательную величину. Таким образом, система более неустойчива относительно образования покоящихся пар.

Чтобы показать, что нормальное состояние электронного газа неустойчиво, достаточно найти хотя бы какое-нибудь состояние с энергией, меньшей энергии нормального состояния. На неустойчивость нашей модельной системы указывает возможность возникновения куперовских пар. Теперь же мы хотим найти основное состояние всей системы. Эта задача приближенно решается микроскопической теорией сверхпроводимости.

## § 9. ТЕОРИЯ БАРДИНА — КУПЕРА — ШРИФФЕРА (БКШ)

Выше мы рассматривали взаимодействие одной лишь пары электронов, хотя взаимодействуют друг с другом, конечно, все электроны. Можно было бы попытаться построить из каждой пары электронов куперовские пары. Но это, очевидно, противоречило бы принципу запрета. Поэтому мы должны быть более аккуратными и с самого начала строить многоэлектронную волновую функцию.

Здесь будет приведено решение этой задачи, основывающееся на вариационном принципе и данное Бардином, Купером и Шриффером. Иной метод решения, использующий спиновую аналогию, был предложен Андерсоном [2]<sup>1)</sup>.

Прежде всего необходимо переписать электрон-электронное взаимодействие в виде редуцированного БКШ гамильтониана, в котором оставлено лишь взаимодействие между парами электронов с противоположными импульсами и спинами. Мы будем исходить из взаимодействия (4.58), сохранив в нем только те слагаемые, которые связывают электроны в такие пары. Удобно представить каждое слагаемое в виде суммы двух эрмитово-сопряженных операторов. Поскольку каждое из них повторяется дважды, эту сумму следует

<sup>1)</sup> Кроме того, существует метод канонического преобразования Боголюбова [29].— *Прим. ред.*

поделить на 2. Таким образом,

$$V_{\text{el el}} = \frac{1}{2N} \sum_{k, q} \left( \frac{V_q^* V_q}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q} c_{k+q}^+ c^{k-q} c_{-k} c_k + \right. \\ \left. + \frac{V_q^* V_q}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} - \hbar\omega_q} c_k^+ c_{-k}^+ c_{-k-q} c_{k+q} \right).$$

Суммирование здесь производится по всем  $k$ ; при этом, чтобы не учитывать каждую пару дважды, состоянию  $k$  мы приписываем спин, направленный вверх, а состоянию  $-k$  — спин вниз. Два таких слагаемых можно объединить, положив во втором  $k+q = x$  и изменив знак индекса  $q$ , по которому проводится суммирование. В результате второе слагаемое принимает форму

$$\frac{1}{2N} \sum_{x, q} \frac{V_q^* V_q}{\varepsilon_{x+q} - \varepsilon_x - \hbar\omega_q} c_{x+q}^+ c^{x-q} c_{-x} c_x.$$

Заменяя переменную  $x$  на  $k$  и комбинируя оба слагаемых, получаем

$$V_{\text{el el}} = \sum_{k, q} \frac{V_q^* V_q \hbar\omega_q / N}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} (c_{-k-q} c_{k+q})^+ (c_{-k} c_k). \quad (5.58)$$

Мы сгруппировали операторы рождения и уничтожения электронов таким образом, чтобы получить *операторы рождения и уничтожения пар*. Оператор

$$b_k = c_{-k} c_k$$

уничтожает, а оператор

$$b_k^+ = c_k^+ c_{-k}^+ = (c_{-k} c_k)^+$$

рождает пару электронов. Из гамильтониана взаимодействия (5.58) следует, что электрон-электронное взаимодействие отвечает притяжению, если связываемые взаимодействием состояния имеют достаточно близкие энергии, т. е. если они лежат достаточно близко к поверхности Ферми. Это как раз и есть то притяжение в определенном интервале энергий, которое приводит к неустойчивости. Область, в которой взаимодействие может оказывать притягивающим, ограничивается интервалом, величина которого порядка дебаевской энергии  $\hbar\omega_D$ . В простейшем приближении коэффициент, стоящий перед операторами рождения и уничтожения пар в (5.58), полагают равным некоторой константе в указанном энергетическом интервале и нулю вне его. Это аналогично тому приближенному рассмотрению взаимодействия, которое мы использовали при получении куперовских пар.

Сейчас мы учтем влияние и кулоновского взаимодействия между электронами. Заметим, что соответствующий матричный элемент  $4\pi e^2 / q^2 \Omega$  также обратно пропорционален  $N$ . Обозначения упро-

щаются, если общий множитель  $1/N$  вынести как коэффициент перед суммой. Тогда матричный элемент взаимодействия запишется в виде

$$V_{k+q, k} = \frac{V_q^* V_q \hbar \omega_q / N}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})^2 - (\hbar \omega_q)^2} + V_{k+q, k} \text{ (кулон),}$$

и если учесть кинетическую энергию электронов, мы приходим к *редуцированному гамильтониану БКШ*:

$$\mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_{k, k'} V_{k', k} b_{k'}^\dagger b_k.$$

Следует обратить внимание на то, что если мы будем исходить из полностью спаренного состояния

$$|\psi\rangle = \prod_k b_k^\dagger |0\rangle,$$

то редуцированный гамильтониан БКШ будет иметь только такие матричные элементы, которые связывают его также только с полностью спаренными состояниями. Поскольку для образования основного состояния необходимы только такие полностью спаренные состояния <sup>1)</sup>, редуцированный гамильтониан БКШ можно переписать в виде

$$\mathcal{H} = \sum_k 2\epsilon_k b_k^\dagger b_k + \sum_{k, k'} V_{k', k} b_{k'}^\dagger b_k.$$

### 1. Основное состояние

Мы будем искать собственное состояние редуцированного гамильтониана БКШ вариационным методом. Такое многоэлектронное состояние записывается в форме

$$|\psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k b_k^\dagger) |0\rangle. \quad (5.59)$$

Состояние  $|0\rangle$  означает вакуум. Величины  $u_k$  и  $v_k$  суть вариационные параметры, которые предполагаются действительными. Таким образом, каждому волновому вектору отвечают два вариационных параметра. Это состояние характеризуется тем, что электроны встречаются лишь в парах. Однако оно довольно своеобразно. Расписав фигурирующее в выражении (5.59) произведение, мы видим что имеется слагаемое, в котором нет ни одной пары, большое число слагаемых с одной парой, и т. д. Число пар или число электронов в этом состоянии точно не определено. Однако неопределенность

<sup>1)</sup> Заметим, что именно по этой причине решение, полученное в следующем параграфе вариационным методом, является на самом деле асимптотически (при  $N \rightarrow \infty$ ) точным [29]. — *Прим. ред.*

числа пар оказывается величиной порядка  $N^{1/2}$ , что намного меньше полного числа электронов  $N$ , так что с этим не возникает никаких серьезных осложнений.

Мы хотим варьировать параметры  $u_k$  и  $v_k$  таким образом, чтобы получить минимум энергии при дополнительном условии: среднее число электронов равно  $N$ . Этого можно добиться с помощью множителя Лагранжа.

Вычислим сначала нормировочный интеграл

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \langle 0 | \prod_k (u_k + v_k b_k) (u_k + v_k b_k^\dagger) | 0 \rangle = \\ &= \prod_k \langle 0 | u_k^2 + v_k^2 b_k b_k^\dagger | 0 \rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2), \end{aligned}$$

причем, переходя ко второй строчке, мы использовали то обстоятельство, что

$$\langle 0 | b_k | 0 \rangle = \langle 0 | b_k^\dagger | 0 \rangle = 0.$$

Наша волновая функция будет нормирована на единицу, если потребовать, чтобы для всех  $k$

$$u_k^2 + v_k^2 = 1.$$

Однако мы на некоторое время откажемся от этого требования, так как будем минимизировать величину

$$\frac{\langle \psi | \mathcal{E} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

Число частиц мы зафиксируем, если потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\langle \psi | \sum_k c_k^\dagger c_k | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = 2 \frac{\langle \psi | \sum_k b_k^\dagger b_k | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = N.$$

В методе множителей Лагранжа минимум функции  $f(x)$  при дополнительном условии  $A(x) = 0$  находят путем минимизации выражения

$$f(x) - \lambda A(x)$$

без всяких дополнительных ограничений; далее определяют  $f(x)$  и параметр  $\lambda$ , основываясь на использовании полученного таким образом минимума и условия  $A(x) = 0$ . Следовательно, в нашем случае нужно минимизировать величину

$$W = \frac{\langle \psi | \mathcal{E} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - 2\mu \frac{\langle \psi | \sum_k b_k^\dagger b_k | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} + \mu N,$$

где параметр  $\mu$  — множитель Лагранжа. Третье слагаемое этого выражения не зависит от вариационных параметров  $u_k$  и  $v_k$ , и поэтому рассматривать его нет необходимости. Используя выражение для редуцированного гамильтониана БКШ, первое и второе слагаемое можно привести к следующей форме:

$$W = \frac{\langle \psi | \sum_k 2(\epsilon_k - \mu) b_k^\dagger b_k + \sum_{k, k'} V_{k'k} b_{k'}^\dagger b_k | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}.$$

Чтобы найти минимум этой величины, ее нужно выразить через вариационные параметры. Слагаемые, содержащие произведение  $b_k^\dagger b_k$ , можно вычислить сразу же, коммутируя оператор  $b_k$  направо до тех пор, пока он не достигнет фигурирующего в выражении (5.59) для  $|\psi\rangle$  множителя

$$(u_k + v_k b_k^\dagger).$$

Коммутация его с этим множителем и действие на вакуум  $|0\rangle$  дает

$$b_k (u_k + v_k b_k^\dagger) |0\rangle = v_k |0\rangle.$$

Подобным же образом «протаскивание» оператора  $b_k^\dagger$  налево опять дает множитель  $v_k$ . Оставшиеся множители в  $\langle \psi | \psi \rangle$ , так же как и при вычислении нормы  $\langle \psi | \psi \rangle$ , приводят к величине

$$\prod_{k' \neq k} (u_{k'}^2 + v_{k'}^2).$$

Таким образом, вклад в величину  $W$  от одного произведения  $b_k^\dagger b_k$  равен

$$\delta W = \frac{2(\epsilon_k - \mu) v_k^2}{u_k^2 + v_k^2}. \quad (5.60)$$

Подобным же образом можно найти и вклад от произведения  $b_k^\dagger b_k$ , «протаскивая» оператор  $b_k$  направо. Это оставляет от соответствующего множителя в  $W$  лишь величину  $u_k$ , которая входит только в произведение с величиной  $v_k$ , оставшейся от волновой функции  $\langle \psi |$ , стоящей слева. Точно так же оператор  $b_k^\dagger$  выделяет множитель  $u_{k'} v_{k'}$ . В результате величина  $W$  принимает вид

$$W = \sum_k 2(\epsilon_k - \mu) \frac{v_k^2}{u_k^2 + v_k^2} + \sum_{k', k} \frac{V_{k'k} u_{k'} v_{k'} u_k v_k}{(u_{k'}^2 + v_{k'}^2)(u_k^2 + v_k^2)}. \quad (5.61)$$

Вместо того чтобы минимизировать это выражение, мы опустим множители

$$u_k^2 + v_k^2 \text{ и } u_{k'}^2 + v_{k'}^2,$$

фигурирующие в его знаменателе, и будем искать минимум получившейся величины при дополнительном условии, состоящем в том,

что эти множители равны единице. Для этого необходимо ввести для каждого значения  $k$  дополнительные множители Лагранжа  $\lambda_k$ . Таким образом, величина, подлежащая минимизации, есть

$$W' = \sum_k [2(\varepsilon_k - \mu)v_k^2 + \lambda_k(u_k^2 + v_k^2)] + \sum_{k, k'} V_{k'k} u_{k'} v_k u_k v_{k'}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти величины  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $\lambda_k$  и  $\mu$ , решив систему уравнений

$$\frac{\partial W'}{\partial u_k} = 0, \quad \frac{\partial W'}{\partial v_k} = 0, \quad u_k^2 + v_k^2 = 1, \quad N = \sum_k 2v_k^2.$$

Два первых уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial u_k} &= 2\lambda_k u_k - 2v_k \Delta_k = 0, \\ \frac{\partial W'}{\partial v_k} &= [4(\varepsilon_k - \mu) + 2\lambda_k] v_k - 2u_k \Delta_k = 0, \end{aligned}$$

где параметр  $\Delta_k$  называется *энергетической целью* и определяется равенством

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{k'k} u_{k'} v_{k'}. \quad (5.62)$$

Эти уравнения можно переписать в более удобной форме, введя энергию

$$E_k = \varepsilon_k - \mu + \lambda_k,$$

которая окажется равной энергии возбужденного состояния сверхпроводника. Это означает просто замену множителя Лагранжа  $\lambda_k$  более удобным параметром. Подставляя вместо величины  $2\lambda_k$  ее выражение через  $E_k$ , получаем

$$\begin{aligned} [E_k - (\varepsilon_k - \mu)] u_k - \Delta_k v_k &= 0, \\ [E_k + (\varepsilon_k - \mu)] v_k - \Delta_k u_k &= 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Опять-таки оказывается более удобным перейти от этих уравнений к другим. Умножим для этого первое из них на  $v_k$ , второе — на  $u_k$  и сложим полученные уравнения, учтя при этом, что

$$u_k^2 + v_k^2 = 1.$$

Это дает

$$u_k v_k = \frac{\Delta_k}{2E_k}. \quad (5.64)$$

Подставляя получающееся отсюда выражение для  $u_k$ ,

$$u_k = \frac{\Delta_k}{2E_k v_k},$$

в первое из уравнений (5.63) и разрешая его относительно  $v_k$ , находим

$$v_k^2 = \frac{E_k - (\epsilon_k - \mu)}{2E_k}. \quad (5.65)$$

Выразим теперь параметр  $v_k$  через  $E_k$  из первого уравнения (5.63) и подставим его во второе из этих уравнений. Сократив результат на  $u_k$ , получим

$$E_k^2 - (\epsilon_k - \mu)^2 - \Delta_k^2 = 0,$$

или

$$E_k = \pm \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta_k^2}. \quad (5.66)$$

Лишь решение со знаком  $+$  приводит к тому, что величина  $v_k$  стремится к нулю при больших  $\epsilon_k$ , и поэтому именно оно имеет физический смысл. Заметим, что  $v_k^2$  есть вероятность найти электрон в состоянии с волновым вектором  $k$ . Из соотношений (5.65) и (5.66) мы видим, что эта вероятность ведет себя так, как показано на фиг. 153, а. Для нормального состояния при абсолютном нуле эта вероятность описывается просто ступенчатой функцией, представленной на фиг. 153, б. Отсюда ясно, что множитель Лагранжа  $\mu$  равен энергии Ферми. Мы будем и дальше использовать букву  $\mu$  для обозначения энергии Ферми при конечной температуре, а не букву  $\xi$ , употребляемую в этом случае для нормального металла. Так принято, поскольку в теории сверхпроводимости символ  $\xi$  зарезервирован для обозначения длины когерентности, которая вскоре будет нами определена.

Вариационное решение привело к функции заполнения состояний, уменьшающейся непрерывно в окрестности энергии Ферми. Мы должны теперь определить еще величину энергетической щели  $\Delta_k$ . Уравнение для величины  $\Delta_k$  можно получить, подставив в ее определение (5.62) выражение (5.64) для  $u_k v_k$ . В результате получим

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{k'k} u_{k'} v_{k'} = - \frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{V_{k'k} \Delta_{k'}}{E_{k'}}. \quad (5.67)$$

Это уравнение называется *уравнением для энергетической щели*. Отметим, что уравнение это интегральное и оно может быть решено, если мы знаем форму потенциала взаимодействия  $V_{k'k}$ .

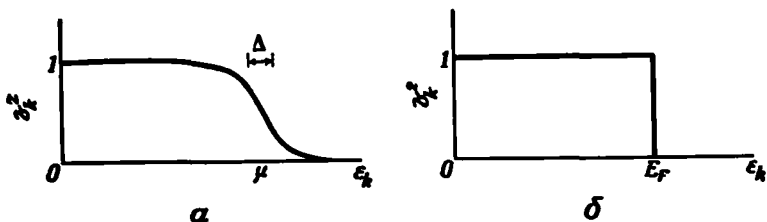
Проведем вычисления для простейшей модели, в которой  $V_{k'k}$  равно константе  $-V$ , при  $|\epsilon_k|$  и  $|\epsilon_{k'}|$  меньших  $\hbar\omega_D$ , и нулю при всех других значениях энергии. Параметр обрезания мы выбрали равным дебаевской энергии. Тогда из уравнения (5.67) следует, что для

$$|\epsilon_k| > \hbar\omega_D$$

параметр  $\Delta_k$  равен нулю, так как равна нулю величина  $V_{k'k}$  при всех значениях  $|e_k|$ . Для

$$|e_k| < \hbar\omega_D$$

уравнение (5.67) приводит к постоянному значению  $\Delta_k$ , не зависящему от  $e_k$ . Мы обозначим его как  $\Delta_0$ . Столь простая форма  $\Delta_k$



Фиг. 153. Вероятность заполнения одноэлектронных состояний  $v_k$  как функция одноэлектронной энергии  $e_k$  при  $T=0$ .

*a* — сверхпроводник; параметр  $\Delta$  для наглядности принят равным  $1/8$  энергии Ферми, хотя на самом деле он составляет величину порядка  $10^{-3}$ ; *b* — нормальный электронный газ.

есть следствие выбранной нами простой модели взаимодействия. Величину  $\Delta_0$  можно найти, взяв соответствующий интеграл. Имеем

$$\Delta_0 = \frac{V}{2} \Delta_0 \sum_k \frac{1}{\sqrt{(e_k - \mu)^2 + \Delta_0^2}} = V \frac{\Delta_0 n(E_F)}{4} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{de}{\sqrt{e^2 + \Delta_0^2}}.$$

При интегрировании мы опять отсчитывали энергии от энергии Ферми и воспользовались тем обстоятельством, что плотность состояний, отвечающая парам, равна  $n(e)/2$  при энергии Ферми.

Сокращая  $\Delta_0$  слева и справа и проводя интегрирование, находим

$$1 = \frac{V}{4} n(E_F) \ln \left| \frac{\sqrt{\hbar^2\omega_D^2 + \Delta_0^2} + \hbar\omega_D}{\sqrt{\hbar^2\omega_D^2 + \Delta_0^2} - \hbar\omega_D} \right|.$$

В пределе слабой связи, который предполагался при получении сверхпроводимости, квадратный корень под логарифмом можно разложить в ряд по  $\Delta_0/\hbar\omega_D$ . Таким образом, получим

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-2/Vn(E_F)}. \quad (5.68)$$

Как и в случае связанных пар, мы пришли к результату, который нельзя получить ни в каком порядке теории возмущений по электр-электронному взаимодействию.

Поскольку параметр  $Vn(E_F)$  много меньше единицы, величина щели  $\Delta_0$  много меньше дебаевской энергии  $\hbar\omega_D$ . Энергетическая щель  $\Delta_0$  оказывается величиной порядка  $KT_C$ , где  $T_C$  — крити-



ческая температура перехода в сверхпроводящее состояние. Последняя составляет всего лишь несколько градусов (наибольшая из ныне известных критических температур чуть превосходит 20 К), что много меньше температуры Дебая, составляющей несколько сот градусов. Отметим тут же, что полученная энергетическая щель должна обнаруживать изотопический эффект, ибо выбранный нами параметр обрезания  $\hbar\omega_D$  зависит от массы изотопов, образующих кристалл.

Можно найти энергию конденсации, вычислив среднее значение энергии  $W$  и вычтя из него среднюю энергию нормального состояния  $W_N$ . Из соотношений (5.61), (5.64) и (5.65) получаем

$$\begin{aligned} W - W_N &= \sum_k (2\varepsilon_k v_k^2 - u_k v_k \Delta_k) - W_N = \\ &= \sum_k \left[ \frac{\varepsilon_k (E_k - \varepsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta_k^2}{2E_k} \right] - \sum_{\varepsilon_k < 0} 2\varepsilon_k, \end{aligned}$$

где все энергии отсчитаны от энергии Ферми  $\mu$ . Учитывая, что  $E_k$  не зависит от знака  $\varepsilon_k$ , это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W - W_N &= \sum_{\varepsilon_k < 0} \left[ \frac{\varepsilon_k (-E_k - \varepsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta_k^2}{2E_k} \right] + \sum_{\varepsilon_k > 0} \left[ \frac{\varepsilon_k (E_k - \varepsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta_k^2}{2E_k} \right] = \\ &= 2 \sum_{\varepsilon_k > 0} \left( \varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{E_k} - \frac{\Delta_k^2}{2E_k} \right). \end{aligned}$$

Мы можем переписать теперь  $E_k$ , воспользовавшись выражением (5.66) и учтя равенство  $\Delta_k = \Delta_0$ , справедливое в узком интервале энергий

$$0 < \varepsilon_k < \hbar\omega_D.$$

Взяв плотность состояний, равную половине плотности состояний при энергии Ферми, т. е. полагая

$$\sum_{\varepsilon_k} \rightarrow \frac{1}{2} n(0) \int d\varepsilon,$$

можно провести интегрирование и получить

$$W - W_N = \frac{n(0)}{2} [(\hbar\omega_D)^2 - \hbar\omega_D \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta_0^2}] \approx \frac{n(0)}{4} \Delta_0^2,$$

учтя при этом, что

$$\Delta_0 \ll \hbar\omega_D.$$

Критическое магнитное поле, т. е. то поле, которое разрушает сверхпроводимость, можно выразить через энергию конденсации, исходя из термодинамических соображений.

## 2. Возбужденные состояния

Возбужденные состояния получаются путем добавления одного электрона в состояние с волновым вектором  $k$ . Тогда при построении сверхпроводящего состояния следует действовать так же, как и раньше, с той разницей, что в произведении (5.59) нужно опустить сомножитель, отвечающий волновому вектору  $k$ . Такой метод содержит маленькую хитрость, поскольку, как уже указывалось выше, основному состоянию не соответствует точно определенное число частиц. Мы постулируем возбужденное состояние, или *квазичастичное возбуждение*, в форме

$$\Psi = c_k^\dagger \prod_{k' \neq k} (u_{k'} + v_{k'} b_{k'}^\dagger) |0\rangle. \quad (5.69)$$

Можно поддерживать полное число частиц постоянным, позволив сверхпроводнику обмениваться электронами с какой-то находящейся с ним в равновесии системой. Любой переходящий электрон имеет энергию Ферми  $\mu$ , так что волновой функции (5.69) соответствует увеличение энергии относительно энергии основного состояния, равное  $\epsilon_k - \mu$ . Изменение же энергии основного состояния (5.61), связанное с удалением пары  $k \uparrow - k \downarrow$ , есть

$$\begin{aligned} \delta W &= -2(\epsilon_k - \mu) v_k^2 - \sum_{k'} (V_{k'k} + V_{kk'}) u_{k'} v_{k'} u_k v_k = \\ &= -2(\epsilon_k - \mu) v_k^2 + 2u_k v_k \Delta_k. \end{aligned}$$

При этом мы учли, что вклады от суммы  $V_{k'k}$  и  $V_{kk'}$  совпадают. Исключая величины  $v_k^2$  и  $u_k v_k$  с помощью соотношений (5.64) и (5.65), получаем полное изменение энергии:

$$\epsilon_k - \mu + \delta W = \frac{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta_k^2}{E_k} = E_k,$$

причем в выражении (5.66) для  $E_k$  следует брать положительный знак. Таким образом, как это уже говорилось ранее, энергия возбуждения (т. е. энергия, требуемая для внесения электрона в сверхпроводник из нормальной системы, находящейся с ним в равновесии) есть

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}.$$

Подобным же образом можно показать, что энергия, необходимая для удаления электрона из сверхпроводника, т. е. для создания «дырочного» возбуждения, также равна  $E_k$ . Отсюда сразу же следует, что наименьшая энергия возбужденного состояния равна  $\Delta_0$ . Здесь нет возбужденных состояний, отстоящих от основного на бесконечно малую энергию, что свойственно нормальному металлу. В этом отношении сверхпроводящее состояние подобно состоянию собствен-

ного полупроводника с равной  $2\Delta_0$  запрещенной зоной. Первые прямые эксперименты по наблюдению сверхпроводящей энергетической щели были проведены с помощью измерения соответствующего края инфракрасного поглощения [16].

### 3. Экспериментальные следствия

Ясно, что сам факт возникновения электронного фазового перехода представляет собой следствие теории, находящееся в согласии с экспериментом. Отыскание основного состояния и спектра возбужденных состояний позволило объяснить широкий круг свойств однородных сверхпроводников. Многие из этого было сделано в оригинальной работе Бардина, Купера и Шриффера. Здесь мы остановимся лишь на некоторых из следствий, вытекающих непосредственно из изложенных выше основ теории.

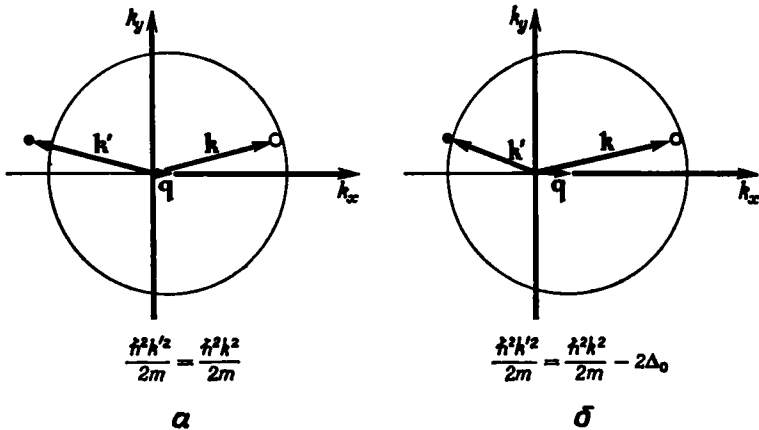
*Незатухающий ток.* Наиболее поразительное свойство сверхпроводников состоит в том, что их сопротивление равно нулю. Это свойство можно сразу понять, исходя из микроскопической теории. Мы строили основное состояние, спаривая электроны с импульсами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ . Можно построить состояние, спаривая электроны с волновыми векторами  $\mathbf{k} + \mathbf{q}$  и  $-\mathbf{k} + \mathbf{q}$ . Получающееся таким образом состояние совершенно эквивалентно исходному, если рассматривать его из координатной системы, движущейся со скоростью  $-\hbar\mathbf{q}/m$ . Центр тяжести каждой пары движется со скоростью  $\hbar\mathbf{q}/m$ , а плотность тока равна  $-Ne\hbar\mathbf{q}/m\Omega$ , где  $N/\Omega$  — электронная плотность. Полная энергия такой системы больше энергии неподвижной на величину  $N\hbar^2q^2/2m$ , равную ее кинетической энергии. Аналогично можно было бы построить и дрейфовое состояние нормального электронного газа. Отличие состоит, однако, в том, что в последнем случае ток оказывается затухающим. Примеси или дефекты в нормальном металле могут рассеивать электроны, переводя их с «переднего края» поверхности Ферми на «задний», что, как показано на фиг. 154, а, приводит к затуханию тока. Матричный элемент потенциала рассеяния

$$\langle \mathbf{k}' | V_{\text{scat}} | \mathbf{k} \rangle c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}}$$

связывает два этих состояния, причем, если  $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$ , энергия сохраняется. Как мы уже говорили об этом при обсуждении кинетических свойств, именно такие процессы рассеяния и приводят к затуханию тока.

И в сверхпроводящем состоянии эти слагаемые в гамильтониане связывают дрейфовое состояние БКШ с состоянием, отвечающим меньшему току. Здесь, однако, если переход должен привести к изменению тока, то он связан с рождением возбужденных электрона и дырки, что наряду с изменением кинетической энергии требует

еще и энергию, равную  $2\Delta_0$ . Таким образом, наличие энергетической дельта-функции, отвечающей закону сохранения энергии, не дает возможности происходить таким переходам до тех пор, пока дрей-



Ф и г. 154. *а* — дрейфовый ток в нормальном металле, равный  $-\hbar q/m$  на один электрон.

Показан один акт рассеяния (из  $k$  в  $k'$ ), приводящий к уменьшению тока.

*б* — плотность тока в сверхпроводнике достаточно большая для того, чтобы могла родиться электрон-дырочная пара, уменьшающая ток.

фовая скорость не окажется столь большой, что выигрыш в кинетической энергии за счет рассеяния назад не превзойдет энергию  $2\Delta_0$ , т. е. пока не окажется выполненным условие

$$\left(\frac{\hbar^2 k_F}{m}\right) (2q) \geq 2\Delta_0.$$

Такой акт рассеяния представлен на фиг. 154, *б*. Указанному условию отвечает ток

$$-\frac{Ne\Delta_0}{\hbar k_F \Omega}.$$

Полагая  $\Delta_0$  равным 1 мэВ и выбирая разумным образом другие параметры, мы приходим к очень большой предельной плотности тока, составляющей величину порядка  $10^7$  А/см<sup>2</sup>.

Мы видим, что если возбудить ток, величина которого лежит в указанных пределах, то обычные процессы рассеяния не могут вызвать его затухания. Одноэлектронные возмущения в случае сверхпроводника не связывают различные состояния с одной и той же энергией и сколь угодно мало отличающимся током, как это имеет место в нормальных металлах.

В приведенных соображениях имеются три дефекта, о которых необходимо сказать. Дрейфовый ток вызывает магнитное поле,

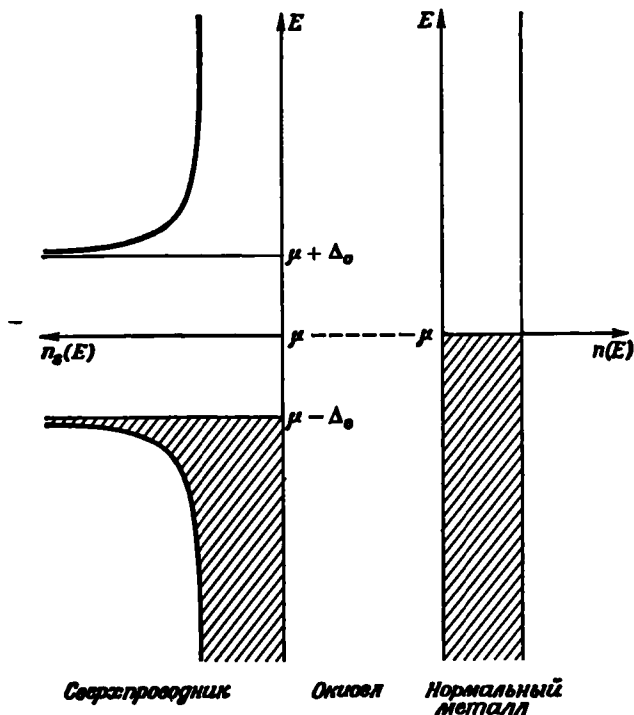
в то время как теория основывается на свойствах электронного газа в отсутствие магнитного поля. В действительности уже давно известно, что сверхпроводники выталкивают магнитное поле. Это *эффект Мейсснера*, который также следует из теории БКШ, хотя вывод его и не столь прост. Таким образом, состояние, отвечающее дрейфу, не может быть правильным в массиве сверхпроводника. В тонких пленках или проволочках, однако, поля оказываются пренебрежимо малыми, и такое решение справедливо. Для тонких пленок и проволочек существует опасность возникновения неоднородностей, при которых один какой-нибудь участок переходит в нормальное состояние, разогревается и вызывает переход в нормальное состояние всего образца. К рассмотрению сверхпроводников такой геометрии мы еще вернемся в п. 3 § 10. Кроме того, электрон-электронное взаимодействие не инвариантно относительно перехода к движущейся системе координат, поскольку оно возникает вследствие распространения колебаний в покоящейся решетке. Наконец, незатухающий ток существует даже и в «бесщелевых сверхпроводниках», которые имеют возбужденные состояния при всех энергиях. Поэтому не удивительно, что экспериментально максимальное значение незатухающего тока намного ниже полученной нами величины и часто оказывается порядка  $10^4$  А/см<sup>2</sup>. Мы вернемся к обсуждению вопроса о критическом токе в п. 3 § 10.

*Туннельный эффект Гавера* [17]. Наиболее прямое наблюдение возбужденных состояний сверхпроводника было осуществлено несколькими годами позже создания теории БКШ и основывалось на туннелировании электронов из нормального металла в сверхпроводник через тонкую окисную пленку. Эта ситуация очень близка к той модели, которую мы привлекали для нахождения возбужденных состояний сверхпроводника в п. 2 § 9. Энергия наименьших одночастичных возбуждений сверхпроводника лежит на величину  $\Delta_0$  выше энергии Ферми, которая в отсутствие внешнего напряжения одинакова как для нормального металла, так и для сверхпроводника. Поэтому естественно ожидать, что в такой системе не будет никакого туннельного тока (при нулевой температуре) до тех пор, пока приложенное напряжение не превзойдет  $\Delta_0/e$  — величину порядка нескольких милливольт.

Это рассуждение не лишено недостатков. Можно заметить, что высказанные соображения остаются справедливыми для сколь угодно тонкой пленки окисла. С другой стороны, известно, что в отсутствие окисла ток между нормальным и сверхпроводящим металлами течет беспрепятственно. Несостоятельность высказанного возражения становится ясной при рассмотрении эффекта Джозефсона (к чему мы еще вернемся) и при учете дополнительного механизма переноса тока через очень тонкие пленки. Факт же состоит в том, что в экспериментах Гавера туннельный ток был пренебрежимо мал до тех пор, пока к структуре не было приложено достаточно

большое напряжение, и это дало возможность непосредственно с помощью вольтметра измерять энергетическую щель  $\Delta_0$ .

Такие эксперименты легче интерпретировать, чем предсказывать. Представим себе, что в гамильтониане содержится туннельное слабое наподобие того, которое обсуждалось в п. 5 § 2 гл. III. Оно связывает одноэлектронные состояния по разные стороны окисной пленки и вызывает одноэлектронные переходы. В нормальном



Ф и г. 155. Диаграмма энергетических уровней одночастичных возбуждений, поясняющая туннельный эффект Гавера.

Она отвечает отсутствию внешнего напряжения, когда энергии Ферми  $\mu$  по обе стороны совпадают.

металле (на фиг. 155 — справа) все одноэлектронные состояния с  $\epsilon < \mu$  заняты. Плотность состояний в пределах интересующих нас нескольких милливольт практически постоянна. В сверхпроводнике (на фиг. 155 — слева) при энергиях ниже  $\Delta_0 + \mu$  одноэлектронных состояний нет. Выше  $\Delta_0 + \mu$  существуют возбужденные состояния, которые при  $T = 0$  не заполнены. Плотность этих состояний можно вычислить, если воспользоваться обычными периодическими граничными условиями и выражением для энергии воз-

буждений (5.66):

$$n_s(E_k) dE_k = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi k_F^2 \frac{dE_k}{(dE_k/dk)} = \frac{mk_F}{\pi^2 \hbar^2} \frac{E_k}{\epsilon_k - \mu} dE_k.$$

Эта плотность возбужденных состояний отлична от нуля при  $\epsilon_k \geq \mu$ , т. е. при  $E_k \geq \Delta_0$ . Такие состояния можно представлять себе как незанятые квазичастичные состояния, что и изображено на фиг. 155. Подобным же образом возможность возбуждения дырки можно представить с помощью заполненных квазичастичных состояний, лежащих ниже энергии Ферми (фиг. 155).

Полагая теперь туннельный матричный элемент  $T$  не зависящим от энергии вблизи уровня Ферми (возникновение сверхпроводимости никак не сказывается на этом одноэлектронном матричном элементе), получаем, что туннельный ток из сверхпроводника при равном  $V$  приложенном напряжении есть

$$I = \frac{2\pi}{\hbar} (-e) T^2 \int dE_k n_s(E_k) n(E_k + eV) f_0(E_k) [1 - f_0(E_k + eV)]. \quad (5.70)$$

Это выражение немедленно следует из формулы для вероятности перехода. Здесь  $n_s$  — плотность квазичастичных состояний сверхпроводника (изображенная на фиг. 155), а  $n$  — плотность состояний нормального металла;  $f_0$  — функция распределения Ферми. Пренебрежем теперь изменением плотности состояний нормального металла  $n(E)$  с энергией и вычислим ток при нулевой температуре. Тогда множитель, содержащий  $f_0$ , оказывается равным единице для энергий в интервале от нуля до  $eV$  и нулю вне его. Особенно полезной величиной служит дифференциальная проводимость  $dI/dV$ , которая получается дифференцированием соотношения (5.70) и в указанных предположениях равна

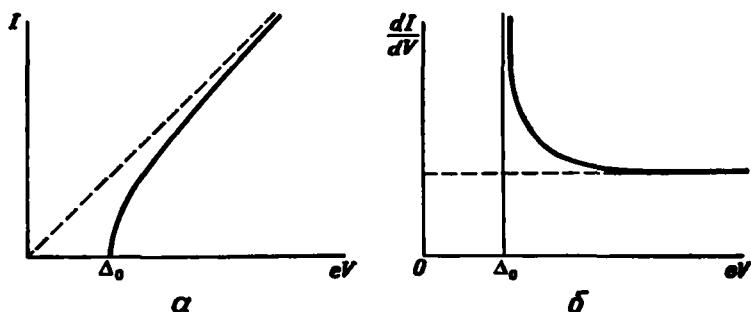
$$\frac{dI}{dV} = \left[ \frac{2\pi}{\hbar} e^2 T^2 n(\mu) \right] n_s(-eV).$$

Мы видим, что дифференциальная проводимость пропорциональна плотности квазичастичных состояний сверхпроводника. Полученный результат представлен на фиг. 156 и дает удивительно точное описание экспериментальных данных.

Ясно, что при конечных температурах фигурирующая в выражении (5.70) функция распределения  $f_0$  не является ступенчатой, и приведенные на фиг. 156 кривые размываются как раз таким образом, как этого следует ожидать исходя из модели, представленной на фиг. 155. Кроме того, экспериментальные кривые имеют тонкую структуру, которую можно интерпретировать, исходя из слабых изменений параметра  $\Delta_k$  с энергией. В частности, пики в зависимости фононной плотности состояний от энергии должны приводить к колебаниям параметра  $\Delta_k$  при энергиях, превышающих щель

на величину соответствующих энергий фононов. Высказанное утверждение находится в хорошем согласии с наблюдающимися осцилляциями. Можно поэтому, исходя из тщательных туннельных экспериментов и используя уравнение для энергетической щели, получить детали распределения фононных частот и найти электрон-фононное взаимодействие [18]. Это служит замечательно тонким подтверждением справедливости теории БКШ.

Можно проводить эксперименты по туннельному эффекту между двумя сверхпроводниками. Модель такой системы получается непосредственным обобщением модели, представленной на фиг. 155, как для случая, когда обе металлические пленки одинаковы, так



Фиг. 156. *a* — ток как функция напряжения в туннельном эффекте Гавера; *b* — дифференциальная проводимость того же перехода.

В обоих случаях пунктирная линия показывает соответствующую зависимость в случае, когда сверхпроводник находится в нормальном состоянии.

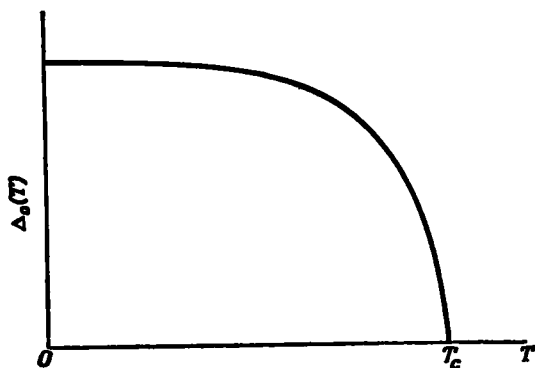
и для случая отличающихся пленок. Здесь уравнение (5.70) остается справедливым, если  $n(E_k + eV)$  заменить на плотность состояний  $n_s(E_k + eV)$  второго сверхпроводника. Порог, выше которого появляется ток, соответствует сумме значений  $\Delta_0$  двух металлов, а при конечных температурах возникает пик при напряжениях, отвечающих их разности; пик обусловлен тепловым возбуждением квазичастичных состояний.

*Термодинамические свойства.* При вычислении энергии квазичастицы мы нашли то уменьшение в выигрыше энергии основного состояния по сравнению с нормальным металлом, которое обусловлено уходом одной куперовской пары. Ясно, что, когда речь идет о тепловом распределении квазичастиц, величину  $\Delta_0$  нужно вычислить заново, учитывая, что в волновой функции (5.59) число множителей уменьшилось. Ясно также, что это приведет к уменьшению величины  $\Delta_0$  вследствие уменьшения «полезной» плотности состояний  $n(E_F)$ , фигурирующей в выражении (5.68). Это в свою очередь снижает минимальную энергию квазичастичных возбуждений и при-



водит к увеличению их числа при данной температуре. Таким образом, совершенно очевидно, что сверхпроводящий переход носит кооперативный характер и существует некоторая температура перехода  $T_c$ , выше которой сверхпроводимость исчезает. В рамках

Ф и г. 157. Зависимость энергетической щели  $\Delta_0$  от температуры, следующая из теории БКШ.



описанной нами теории можно непосредственно вычислить эту критическую температуру. Оказывается, что

$$KT_c = \frac{2\Delta_0}{3,52},$$

где  $\Delta_0$  — значение щели при  $T = 0$ . Это соотношение хорошо подтверждается экспериментом в случае сверхпроводников со «слабой связью», таких, как алюминий. Ниже критической температуры  $\Delta_0$  зависит от  $T$  так, как это показано на фиг. 157. При  $T = T_c$  величина  $\Delta_0$  обращается в нуль с бесконечной производной. Поведение  $\Delta_0$  вблизи  $T_c$  можно описать с помощью критических показателей, подобно тому как описывается намагниченность вблизи температуры Кюри. Как и в последнем случае, простая теория (в данном случае теория БКШ) не дает правильного показателя.

Энергетическая щель в спектре возбуждений меняет электронную теплоемкость и приводит к тому, что теплоемкость здесь подобно случаю полупроводников экспоненциально стремится к нулю при  $T \rightarrow 0$ , причем эта экспоненциальная зависимость имеет вид

$$e^{-2\Delta_0/KT}.$$

Естественно, при любой конечной температуре в сверхпроводнике имеются квазичастичные возбуждения, которые влияют на целый ряд свойств. Например, длинноволновая звуковая волна ( $\hbar\omega < 2\Delta_0$ ) не может привести к возбуждению основного состояния, но может быть рассеяна любыми имеющимися квазичастицами. Таким образом, электронный вклад в поглощение ультразвука экспоненциально стремится к нулю при низких температурах и приближается к значению, отвечающему нормальному металлу при приближении  $T$  к  $T_c$ .

(Это, однако, не относится к поперечным волнам, взаимодействие которых с электронами изменяется в присутствии сверхпроводимости.)

#### 4. Сверхпроводящая волновая функция или параметр порядка

Следует отметить замечательное свойство основного состояния БКШ, состоящее в том, что средние значения операторов рождения или уничтожения пар отличны от нуля. По аналогии с тем, что уже говорилось при рассмотрении когерентных фононных состояний, это свойство имеет непосредственное отношение к тому факту, что число частиц в основном состоянии БКШ не определено точно. Рассмотрим, например, оператор

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Omega} \sum_k b_k.$$

Среднее значение  $\mathbf{B}$  можно найти, воспользовавшись теми же соображениями, которые привели нас к равенству (5.60). Таким образом, получаем

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{\Omega} \sum_k u_k v_k. \quad (5.71)$$

Сравнивая это выражение с соотношением (5.62) и опять-таки используя предположение о постоянстве матричного элемента взаимодействия

$$V_{k'h} = -V,$$

находим

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}^+ \rangle = \frac{\Delta}{\Omega V}, \quad (5.72)$$

где

$$\mathbf{B}^+ = \sum_k b_k^+.$$

Полученная нами величина характеризует дальний порядок, свойственный сверхпроводящему основному состоянию. С ослаблением сверхпроводимости при уменьшении  $\Delta$  параметр порядка  $\langle \mathbf{B} \rangle$  становится меньше и обращается в нуль в нормальном состоянии.

Можно ввести обобщенный параметр порядка с помощью определенных в п. 2 § 4 гл. IV операторов электронного поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \sum_{k, k'} \psi_{k'}(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) c_{k'\uparrow} c_{k\downarrow}.$$

Стрелки означают направление спина. Нас опять интересует среднее значение  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  по основному состоянию БКШ. По аналогии с соотношением (5.71) получаем выражение

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \psi_{-\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

которое в случае плоских волн опять-таки равно  $\Delta/V\Omega$ , т. е. для основного состояния БКШ  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  не зависит от координат. Если, однако, нас интересует среднее от  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  по БКШ состоянию, отвечающему дрейфу (п. 3 § 9), то

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\Delta}{\Omega V} e^{2iq \cdot \mathbf{r}}.$$

Следовательно, плотность тока выражается через  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar N \Omega}{4\pi i} e \left( \frac{V}{\Delta} \right)^2 [\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle^* \nabla \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle \nabla \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle^*]. \quad (5.73)$$

Свойства системы можно выразить непосредственно через эту функцию пространственных координат  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$ , называемую *сверхпроводящей волновой функцией* или *параметром порядка*. Она оказывается макроскопической переменной, описывающей дальний порядок в сверхпроводнике точно так же, как отличное от нуля значение амплитуды описывает смещения в фоновой системе.

Чтобы вычислить свойства нашей системы, нужно иметь лишь метод вычисления самого параметра  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$ , т. е. нам необходимо найти уравнение для этого параметра, представляющее собой некий аналог уравнения Шредингера для обычной волновой функции. Мы получим такое уравнение для простых систем, а затем обратимся к более сложным методам, основывающимся на приближении самосогласованного поля.

Вспомним сначала, как мы вычисляли величину  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  для основного состояния БКШ. Строя это состояние с действительными параметрами  $u_{\mathbf{k}}$  и  $v_{\mathbf{k}}$ , мы полагали тем самым, что оно не зависит от времени, а значит, не зависящей от времени оказывалась и величина  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$ . Другими словами можно сказать, что в качестве нулевой энергии мы выбрали энергию этого собственного состояния системы. Так можно делать лишь для некоторого собственного состояния или в случае, когда система находится в равновесии. При обсуждении эффекта Джозефсона в следующем параграфе мы будем рассматривать два сверхпроводника, каждый из которых находится в равновесии, но между ними имеется разность потенциалов. В этом простом случае можно тотчас же найти временную зависимость параметра  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$ .

Сдвиг потенциальной энергии электрона сверхпроводника на  $\delta V$  приведет к фазовому множителю

$$e^{-i\delta V t/\hbar}$$

в волновой функции каждого электрона, что эквивалентно множителю

$$e^{-2i\delta V/\hbar}$$

в каждой из величин  $v_k$ . Из соотношения (5.71) видно, что это приводит к такой же временной зависимости и параметра  $\langle \mathbf{V} \rangle$ . Таким образом, если обозначить разность фаз параметра  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  между двумя сверхпроводниками как  $\phi$ , то наложение разности потенциалов  $\delta V$  между ними вызывает изменение  $\phi$  во времени, подчиняющееся уравнению

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -2\delta V. \quad (5.74)$$

Ясно, что эта разность фаз не существенна, если два сверхпроводника не связаны друг с другом. Она, однако, становится важной, если сверхпроводники связаны. Уравнения (5.73) и (5.74) образуют основу для понимания эффекта Джозефсона, возникающего при наличии слабой связи между двумя сверхпроводниками.

Из соотношений (5.73) и (5.74) вытекают некоторые следствия относительно поведения  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  и в более общих условиях. Представим себе сверхпроводник в основном состоянии с постоянным  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  и приложим к нему неоднородный потенциал. Тогда фаза будет меняться быстрее в той области, где потенциал ниже. Следовательно, согласно выражению (5.73), появится сверхпроводящий ток. Поток электронов будет направлен в область с низким потенциалом, вызывая тем самым восстановление однородности потенциала. Система поэтому может находиться в стационарном состоянии, только если  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  постоянно во времени (или если изменение фазы однородно по образцу), а это может быть лишь в отсутствие градиента потенциала.

Чтобы найти более общий способ определения функции  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$ , следует вновь обратиться к гамильтониану БКШ. Уравнение для  $\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}) \rangle$  можно получить с помощью метода самосогласованного поля. Этот метод (Боголюбов [19]) представляет собой альтернативу методу БКШ и эквивалентен последнему. Мы совершим лишь первый шаг в этом направлении (более подробное описание можно найти в книге Де Жена [13]). Затем мы перейдем к теории Гинзбурга — Ландау, которая приближенно решает ту же задачу.

Электрон-электронные взаимодействия учитываются слагаемым в гамильтониане

$$V_{\text{e-e}} = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}), \quad (5.75)$$

выраженным через обсуждавшиеся в п. 2 § 4 гл. IV полевые операторы. Приближение самосогласованного поля состоит в замене пары операторов, таких, как  $\psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}')$ , средним ее значением, что сводит электрон-электронное взаимодействие к взаимодействию элек-

трона с простым потенциалом. Мы видели, что в сверхпроводнике отличными от нуля оказываются также средние значения произведений  $\psi^{\uparrow}(\mathbf{r})\psi^{\uparrow}(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$ , так что в уравнениях самосогласованного поля появляется дополнительное слагаемое. В нашем приближенном основанном на теории БКШ рассмотрении считалось, что потенциал не зависит от волнового вектора (во всяком случае, в существенной для нас области), чему в реальном пространстве соответствует контактное взаимодействие

$$V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -V\Omega\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

и что он связывает состояния с противоположными спинами. Поэтому взаимодействие (5.75) принимает форму

$$V_{\text{el el}} \approx -V\Omega \int d^3r \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}),$$

где мы собрали слагаемые с перевернутыми спинами, чтобы избавиться от множителя  $1/2$ . Воспользовавшись выражением (5.72) и положив фазу величины  $\Delta$  совпадающей с фазой  $\langle \mathbf{B} \rangle$ , получаем, что последнее выражение в приближении самосогласованного поля принимает форму

$$V_{\text{el el}} \approx - \int d^3r [\Delta(\mathbf{r})\mathbf{B}^{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r})].$$

Величину  $\Delta(\mathbf{r})$  называют иногда *потенциалом спаривания*. Однако необходимо заметить, что это слагаемое в гамильтониане не сохраняет число частиц, что должно было бы быть в случае обыкновенного потенциала.

Окончательный гамильтониан можно опять выразить через операторы электронного поля и диагонализовать с помощью канонического преобразования к полевым операторам, представляющим собой линейную комбинацию операторов  $\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})$ , что приводит к так называемым уравнениям Боголюбова. Эти уравнения применительно к случаю основного состояния приводят к результатам, эквивалентным полученным нами выше с помощью метода БКШ. Их можно решить в принципе и в случае неоднородной системы, однако сделать это трудно. Задача существенно упрощается для температур, близких к температуре сверхпроводящего перехода, где среднее  $\langle \mathbf{B} \rangle$  мало и его можно использовать в качестве параметра разложения. Именно это приближение и используется в теории Гинзбурга — Ландау, которая в действительности предшествовала микроскопической теории. К этому приближению мы вернемся в п. 3 § 10.

### 5. Эффект Джозефсона

В туннельном эффекте Гавера ток через барьер, образованный пленкой изолятора, переносится отдельными электронами, что приводит к возникновению квазичастичных возбуждений по обе стороны

перехода. В 1962 г. Джозефсон [20] предсказал возможность появления такого сверхпроводящего туннельного тока, для которого число квазичастичных возбуждений в сверхпроводниках остается неизменным. В этих условиях через туннельный барьер течет незатухающий ток в отсутствие приложенного напряжения. Это замечательное явление можно рассматривать двумя различными способами, иллюстрируя тем самым два обсуждавшихся нами выше метода теории сверхпроводимости. Первый из них основывается непосредственно на теории БКШ и использует изящную технику, развитую Ферреллом [21]<sup>1)</sup>. С ее помощью можно точно найти величины сверхпроводящих токов, но соответствующие расчеты довольно сложны. Второй метод основывается на описании эффекта с помощью сверхпроводящей волновой функции. Здесь мы используем только второй метод описания. Результат будет содержать неопределенный параметр, но он наглядно иллюстрирует, каким образом фазу сверхпроводящей волновой функции можно использовать в качестве макроскопической переменной, подобной разности потенциалов на переходе, позволяя тем самым анализировать электрические схемы, содержащие сверхпроводящие элементы. По-видимому, этот метод окажется полезным инженерам, поскольку явление сверхпроводимости играет все большую роль в электронике.

Представим себе сначала два изолированных сверхпроводника, каждый из которых описывается своей сверхпроводящей волновой функцией, причем функции эти не перекрываются друг с другом (поскольку сверхпроводящая волновая функция должна обращаться в нуль с обращением в нуль электронной плотности). Пусть каждый из них находится в собственном состоянии, так что имеет точно определенную фазу, и две их сверхпроводящие волновые функции можно записать в виде

$$B_1(r) e^{i\varphi_1} \text{ и } B_2(r) e^{i\varphi_2}$$

соответственно, причем величины  $B_1$  и  $B_2$  выбраны действительными. Возьмем сначала энергии Ферми обоих сверхпроводников одинаковыми. Поэтому фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно выбрать независимыми от времени, хотя и отличающимися друг от друга.

Приближим теперь эти сверхпроводники друг к другу настолько, что их электронные волновые функции, а значит, и сверхпроводящие волновые функции окажутся перекрывающимися. Далее, действуя в духе приближения сильной связи, предположим, что сверхпроводящую волновую функцию такой системы можно представить в виде суммы отдельных волновых функций:

$$B(r) = B_1(r) e^{i\varphi_1} + B_2(r) e^{i\varphi_2}. \quad (5.76)$$

Поскольку теперь фаза сверхпроводящей волновой функции в области перекрытия меняется с координатой, в системе возникает ток,

<sup>1)</sup> См. также [13].

который можно вычислить с помощью соотношения (5.73). Сразу видно, что этот ток должен быть пропорциональным  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Поэтому мы можем выразить полный сверхпроводящий ток, текущий из сверхпроводника 1 в 2, в виде

$$J = -J_1 \sin \varphi, \quad (5.77)$$

где

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

— разность фаз двух этих сверхпроводников, а  $J_1$  — положительная постоянная, зависящая от деталей перекрытия. Знак выбирается исходя из того соображения, что при малых разностях фаз электроны перетекают в сверхпроводник с большей фазой, а значит, ток идет в противоположном направлении.

Поскольку сверхпроводящая волновая функция квадратична по волновой функции электронов, константа  $J_1$  — четвертого порядка по величине электронной функции в области туннелирования. Рассмотрение туннелирования нормальных электронов показывает, что туннельный матричный элемент квадратичен по электронным волновым функциям в области барьера. Следовательно, сверхпроводящий туннельный ток квадратичен по туннельному матричному элементу так же, как и туннельный ток обычных электронов. Можно поэтому ожидать, что этот сверхпроводящий ток — ток Джозефсона — сравним с обычным туннельным током между металлами в той же конфигурации. Это заключение не представляется сразу же очевидным, поскольку можно было бы ожидать, что сверхпроводящая волновая функция спадает быстрее, чем электронная плотность. Однако сделанный вывод оказывается довольно близким к истине. Подробные вычисления показывают, что параметр  $J_1$  равен тому току, который шел бы через систему, если бы оба сверхпроводника перешли в нормальное состояние, а к переходу было бы приложено напряжение, равное величине  $\Delta$ , умноженной на  $\pi/2$ . Постоянный сверхпроводящий ток, задаваемый выражением (5.77), описывает *стационарный эффект Джозефсона*.

Если между двумя сверхпроводниками приложена разность потенциалов, причем по-прежнему предполагается, что полную сверхпроводящую волновую функцию можно представить в форме (5.76), то мы видим, что разность фаз изменяется со временем в соответствии с уравнением (5.74). Сохраняя знаки в соответствии с (5.77) и налагая разность потенциалов

$$V = V_2 - V_1,$$

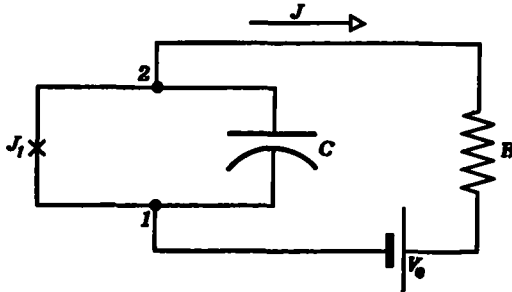
можно записать

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (5.78)$$

где  $e$  — величина заряда электрона. Если разность потенциалов не зависит от времени, то из уравнения (5.78) следует, что измене-

ние фазы со временем происходит с постоянной скоростью и мы приходим к переменному току с частотой  $2eV/\hbar$ . Это нестационарный эффект Джозефсона.

Уравнения (5.77) и (5.78) характеризуют туннельный переход и позволяют полностью исключить фазу из конечных результатов. Для более реалистического анализа свойств перехода необходимо



Ф и г. 158. Простая цепь, содержащая джозефсоновский переход, характеризующийся параметром  $J_1$  и емкостью  $C$ .

Туннельный переход обозначен крестиком, напоминающим о конфигурации переходов, получаемых методом напыления; параллельно ему включена емкость перехода.

более полное его описание и учет свойств цепи. Заметим, в частности, что джозефсоновский переход всегда имеет заметную емкость, позволяющую течь через него дополнительному току. Поэтому на схеме следует изображать параллельную переходу емкость.

Построим теперь эквивалентную схему перехода и исследуем его поведение. Эта схема представлена на фиг. 158. Если обозначить через  $\phi$  и  $V$  значения разности фаз и потенциалов, получаемые вычитанием соответствующих значений в сверхпроводнике 2 из значений в сверхпроводнике 1, то ток  $J$  через переход задается выражением

$$J = J_1 \sin \phi - C \frac{dV}{dt}.$$

Далее, для внешней цепи справедливо уравнение

$$V = V_0 + RJ.$$

Требуется еще одно уравнение, связывающее  $J$ ,  $V$  и  $\phi$ , каковым, конечно, служит (5.78).

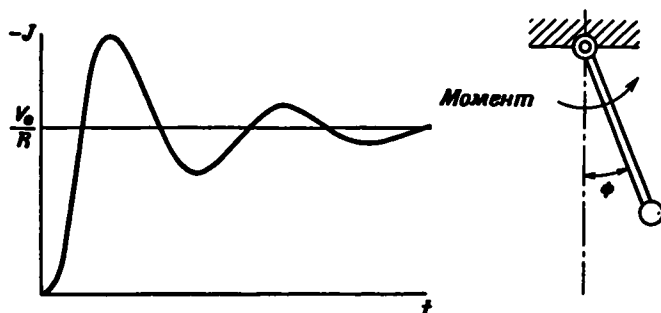
Эту систему уравнений удобнее всего решать, исключив  $V$  и  $J$ . В результате получаем

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{2eJ_1}{\hbar C} \sin \phi + \frac{2eV_0}{\hbar RC} - \frac{1}{RC} \frac{d\phi}{dt}. \quad (5.79)$$

Решение этого уравнения связано с математическими трудностями, поскольку оно содержит слагаемое с  $\sin \phi$ . К счастью, однако, результат физически очевиден, поскольку точно такое же уравнение описывает движение маятника с произвольно большим углом отклонения  $\phi$ . Левая часть уравнения (5.79) есть угловое ускорение. Первое слагаемое в правой части отвечает угловой компоненте

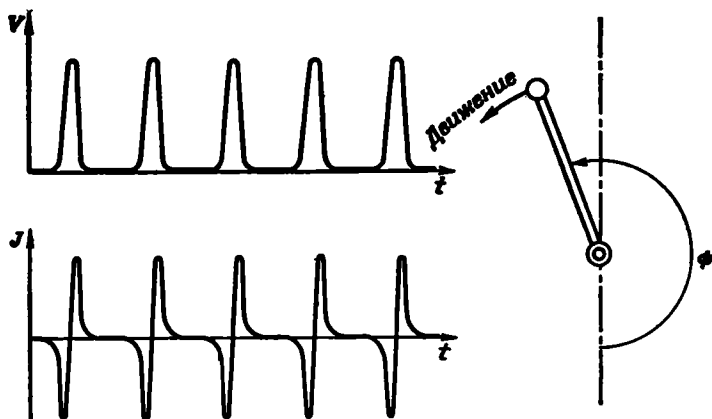


силы тяжести, когда угол отклонения равен  $\varphi$ . Второе слагаемое отвечает приложенному к маятнику моменту, пропорциональному  $V_0$ , а третье описывает вязкое затухание вследствие внешнего



Ф и г. 159. Зависимость от времени джозефсоновского тока, возникающего после наложения на переход малого постоянного напряжения, и схема движения соответствующего маятника.

сопротивления. Таким образом, решение уравнения (5.79) соответствует колебаниям маятника, которые можно рассчитать или представить себе с помощью физических соображений. Тогда напряжению



Ф и г. 160. Зависимость напряжения и сверхпроводящего тока джозефсоновского перехода от времени в высокочастотном эффекте Джозефсона в том случае, когда приложенное напряжение чуть больше того, которое необходимо для поддержания осцилляторного режима.

Справа опять приведена схема движения соответствующего маятника.

на переходе, согласно уравнению (5.78), можно сопоставить скорость вращения маятника, а сверхпроводящему току через переход — боковое отклонение маятника.

С помощью этой аналогии мы можем легко понять стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона. Первому отвечает

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

и решение уравнения (5.79) сразу же дает

$$J = -J_1 \sin \varphi = -\frac{V_0}{R}.$$

Это соответствует постоянному отклонению маятника под действием момента соответствующей величины. Сверхпроводящий постоянный ток имеет порядок величины  $J_1$ . Если мы будем увеличивать ток, увеличивая напряжение, то можно видеть, что должны возникнуть осцилляции тока, в чем легко убедиться, опять-таки представив себе маятник. Если момент достаточно велик, то маятник перевернется и начнет вращаться. Угловая его скорость будет ограничена слагаемым, описывающим вязкое трение, и фаза будет расти со временем приближенно по линейному закону. Два последних слагаемых в уравнении (5.79) окажутся равными друг другу по величине и противоположными по знаку, что и определит частоту  $\omega = 2eV_0/\hbar$ , соответствующую нестационарному эффекту Джозефсона.

Интересно рассмотреть две другие часто возникающие ситуации. Представим себе, что сначала  $V_0 = 0$  и решением уравнения (5.79) будет  $\varphi = 0$ . Если мы мгновенно приложим малое напряжение  $V_0$ , замкнув, например, ключ, то поведение такой цепи можно опять-таки установить на основе аналогии с маятником. Если к маятнику мгновенно приложить крутящий момент, то он отклонится и будет осциллировать относительно конечного положения, медленно затухая. Соответствующее возрастание тока представлено на фиг. 159.

Можно установить характер зависимости напряжения и тока в случае нестационарного эффекта Джозефсона при уменьшении напряжения. Представим себе, что внешнее сопротивление велико настолько, что слагаемое, отвечающее затуханию, можно считать малым. Рассмотрим опять поведение маятника при уменьшении крутящего момента, чему отвечает уменьшение угловой скорости. Если момент становится довольно малым, он будет достаточным лишь для того, чтобы на каждом обороте заставить маятник перевалить через верхнюю точку. Поэтому угловая скорость окажется очень малой в верхней точке, но в нижней она будет большой. Соответствующие зависимости тока и напряжения представлены на фиг. 160. Мы видим, что нестационарный эффект Джозефсона при низких напряжениях искажается. Изучение электромагнитных полей в переходе показывает, что каждый из изображенных на фиг. 160 импульсов можно интерпретировать как прохождение через джозефсоновский переход одного кванта магнитного потока, о чем речь пойдет в п. 4 настоящего параграфа.

Мы не обсуждали здесь вопроса о поведении сверхпроводящей волновой функции в присутствии магнитного поля. Этим мы займемся при рассмотрении уравнений Гинзбурга — Ландау. Мы увидим, что проходящее через барьер магнитное поле обуславливает изменение фазы сверхпроводящей функции в плоскости перехода и приводит к взаимной компенсации токов, текущих через различные участки перехода. Поэтому джозефсоновский переход оказывается в высшей степени чувствительным к магнитному полю.

## § 10. ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Примерно за семь лет до появления теории БКШ Гинзбург и Ландау предложили феноменологическую теорию сверхпроводимости [23]. Она была мало известна на Западе и не давала возможности понять микроскопический механизм сверхпроводимости, поиском которого уделялось много сил. В течение первых нескольких лет после появления микроскопической теории БКШ практически все теоретические работы на Западе основывались на этой теории, а большая часть экспериментов была направлена на исследование различных ее предсказаний. Когда же вопрос о корректности микроскопической теории перестал вызывать сомнения, внимание привлекли неоднородные системы и те сверхпроводники, для которых такая теория в простейшей форме была неприменима. На этом этапе большинство теоретических исследований и, по-видимому, все работы, посвященные интерпретации экспериментальных данных, в качестве основы использовали феноменологическую теорию.

Она восходит к старой двухжидкостной модели сверхпроводника. Согласно этой модели, электроны находятся либо в нормальном состоянии, чему отвечают квазичастичные возбуждения последовательной микроскопической теории, либо в сверхпроводящем или конденсированном состоянии. Сверхпроводящие электроны способны переносить незатухающий ток, а нормальные электроны могут переносить, скажем, тепловую энергию. Обозначим с помощью  $n_s$  долю сверхпроводящих электронов; она пропорциональна плотности сверхпроводящих электронов. Доля  $n_s$  зависит от температуры и падает до нуля при температуре, равной критической. Гинзбург и Ландау построили теорию вблизи критической температуры, т. е. там, где плотность сверхпроводящих электронов настолько мала, что эту величину можно было использовать в качестве параметра разложения. Точнее говоря, они описывают сверхпроводник с помощью волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$ , через которую долю сверхпроводящих электронов можно выразить с помощью соотношения

$$n_s(\mathbf{r}) = \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}). \quad (5.80)$$