Мы не обсуждали здесь вопроса о поведении сверхпроводящей волновой функции в присутствии магнитного поля. Этим мы займемся при рассмотрении уравнений Гинзбурга — Ландау. Мы увидим, что проходящее через барьер магнитное поле обусловливает изменение фазы сверхпроводящей функции в плоскости перехода и приводит к взаимной компенсации токов, текущих через различные участки перехода. Поэтому джозефсоновский переход оказывается в высшей степени чувствительным к магнитному полю.

## § 10. ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА — ЛАНДАУ

Примерно за семь лет до появления теории БКШ Гинзбург и Ландау предложили феноменологическую теорию сверхпроводимости [23]. Она была мало известна на Западе и не давала возможности понять микроскопический механизм сверхпроводимости, поискам которого уделялось много сил. В течение первых нескольких лет после появления микроскопической теории БКШ практически все теоретические работы на Западе основывались на этой теории, а бо́льшая часть экспериментов была направлена на исследование различных ее предсказаний. Когда же вопрос о корректности микроскопической теории перестал вызывать сомнения, внимание привлекли неоднородные системы и те сверхпроводники, для которых такая теория в простейшей форме была неприменима. На этом этапе большинство теоретических исследований и, по-видимому, все работы, посвященные интерпретации экспериментальных данных, в качестве основы использовали феноменологическую теорию.

Она восходит к старой двухжидкостной модели сверхпроводника. Согласно этой модели, электроны находятся либо в нормальном состоянии, чему отвечают квазичастичные возбуждения последовательной микроскопической теории, либо в сверхпроводящем или конденсированном состоянии. Сверхпроводящие электроны способны переносить незатухающий ток, а нормальные электроны могут переносить, скажем, тепловую энергию. Обозначим с помощью $n_s$ *долю* сверхпроводящих электронов; она пропорциональна *плотности* сверхпроводящих электронов. Доля $n_s$ зависит от температуры и падает до нуля при температуре, равной критической. Гинзбург и Ландау построили теорию вблизи критической температуры, т. е. там, где плотность сверхпроводящих электронов настолько мала, что эту величину можно было использовать в качестве параметра разложения. Точнее говоря, они описывают сверхпроводник с помощью волновой функции $\psi(\mathbf{r})$, через которую долю сверхпроводящих электронов можно выразить с помощью соотношения

$$n_s(\mathbf{r}) = \psi^*(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}). \qquad (5.80)$$

Заметим теперь, что функция $\psi(\mathbf{r})$ пропорциональна сверхпроводящей волновой функции или параметру порядка $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle$, введенному в п. 4 § 9, и, следовательно, величине $\Delta(\mathbf{r})$. Это не так уж очевидно, однако в конце п. 2 настоящего параграфа мы убедимся в том, что сделанное утверждение согласуется с полученными результатами и с микроскопической теорией. Излагаемая здесь формулировка теории Гинзбурга — Ландау никак не связана с микроскопическим происхождением функции $\psi(\mathbf{r})$, для которой мы будем использовать впредь общепринятый термин *параметр порядка*. Для теории важен только сам факт ее существования. Теорию перехода порядок — беспорядок в ферромагнетиках можно также сформулировать с помощью введения некоторого параметра порядка, каковым в этом случае служит локальная намагниченность системы.

Главным моментом теории Гинзбурга — Ландау является построение выражения для свободной энергии в виде разложения по параметру порядка. Затем с помощью вариационного метода из этого выражения получают дифференциальное уравнение для параметра порядка. Коль скоро параметр найден, мы можем определить с его помощью свойства системы. Далее входящие в теорию Гинзбурга — Ландау различные параметры можно сопоставить параметрам микроскопической теории. Однако, по-видимому, лучше отложить такую идентификацию и показать сначала, как теория была построена с помощью одних лишь интуитивных соображений.

### 1. Вычисление свободной энергии

Напишем сначала выражение для свободной энергии при произвольной температуре в виде разложения по степеням плотности сверхпроводящих электронов:

$$F(T) = F_n(T) + a(T)\, n_s + \frac{b(T)}{2} n_s^2 + \ldots .$$

Здесь $F_n$ — свободная энергия нормального металла, в котором $n_s$ равно, конечно, нулю.

Можно получить некоторые свойства коэффициентов $a$ и $b$, если минимизировать свободную энергию по $n_s$, опустив все слагаемые более высокого порядка чем $n_s^2$. Тогда

$$n_s = \frac{-a(T)}{b(T)}. \tag{5.81}$$

Если речь идет о решении, отвечающем сверхпроводящему состоянию, то эта величина должна быть больше нуля. Тогда равновесная свободная энергия есть

$$F(T) = F_n(T) - \frac{a(T)^2}{2b(T)}. \tag{5.82}$$

Плотность сверхпроводящих электронов в критической точке $T_c$ должна обратиться в нуль, поэтому можно ожидать, что основным слагаемым в разложении $a(T)$ по степеням $T - T_c$ должно быть линейное слагаемое. Далее, сверхпроводящее состояние должно обладать энергией, меньшей, чем нормальное при температурах, меньших $T_c$, и большей, чем нормальное при температурах, больших $T_c$. Таким образом, коэффициент пропорциональности между $a(T)$ и $T - T_c$ должен быть положительным. Кроме того, мы полагаем, что слагаемое нулевого порядка в разложении $b$ по $T - T_c$ отлично от нуля. Следовательно, для температур, очень близких к $T_c$,

$$a = \frac{\alpha(T-T_c)}{T_c}, \qquad (5.83)$$
$$b = \beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — положительные константы. Подставляя далее выражения (5.83) в формулу для свободной энергии, находим

$$F = F_n(T) - \frac{\alpha^2 (T-T_c)^2}{2\beta T_c^2}. \qquad (5.84)$$

Этот результат справедлив только при температурах, меньших $T_c$, так как в противном случае плотность сверхпроводящих электронов будет, как мы видели, отрицательной. Такое поведение отвечает фазовому переходу второго рода при температуре $T_c$. Свободная энергия и первая ее производная по температуре остаются непрерывными в этой точке, вторая же производная претерпевает скачок. В соответствии с этим испытывает скачок теплоемкость, что и наблюдается при сверхпроводящем переходе.

Теперь мы хотим рассмотреть неоднородную систему, в которой, следовательно, плотность сверхпроводящих электронов и параметр порядка меняются с координатой. Поскольку минимуму свободной энергии однородной системы соответствует постоянный параметр порядка, можно ожидать, что увеличение свободной энергии системы, связанное с его неоднородностью, пропорционально $|\nabla \psi|^2$. С этого момента мы перепишем все выражения с помощью параметра порядка. Полная свободная энергия равна

$$F = \int f(\mathbf{r})\, d\tau,$$

где

$$f = f_n + a(T)\,|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} b(T)\,|\psi(\mathbf{r})|^4 + c(T)\,|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2, \qquad (5.85)$$

причем параметры $a$ и $b$ относятся к единице объема системы. Мы полагаем, что параметр $c$ в критической точке отличен от нуля и положителен, поэтому вблизи критической температуры мы считаем его положительной константой.

Мы хотим, наконец, добавить взаимодействие с магнитным полем, используя векторный потенциал **A**, определяющий поле с помощью соотношения

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Свободная энергия должна зависеть только от магнитного поля; она не должна меняться, если к векторному потенциалу добавить градиент некоторой функции координат (поскольку ротор от него обращается в нуль). Это просто означает, что свободная энергия должна быть *градиентно инвариантной*. Градиентная инвариантность обычного уравнения Шредингера достигается тем, что к градиенту добавляется величина $ie\mathbf{A}/\hbar c$, где $e$ — абсолютная величина заряда электрона. Гинзбург и Ландау именно так и поступили, хотя теперь ясно, что градиентная инвариантность не нарушится, если даже вместо коэффициента $e/\hbar c$ взять другую величину Это можно сделать, заменив заряд электрона $-e$ на эффективный заряд $q^*$. Теперь установлено, что $q^* = -2e$, где множитель 2 появляется вследствие условия спаривания, следующего из микроскопической теории. Мы, однако, сохраним общую форму с $q^*$. Таким образом, плотность свободной энергии

$$f = f_n + a\,|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}\,b\,|\psi(\mathbf{r})|^4 + c\left|\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi(\mathbf{r})\right|^2 + \\ + \frac{1}{8\pi}\,\mathbf{A}\cdot(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}), \tag{5.86}$$

где последнее слагаемое есть просто плотность энергии магнитного поля.

## 2. Уравнения Гинзбурга — Ландау

Минимизируем теперь полную свободную энергию по параметру порядка и векторному потенциалу, т. е. минимизируем $F$ по отношению к вариациям $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$ (рассматриваемым как независимые переменные) и по отношению к вариации $\delta\mathbf{A}$. Можно записать вариацию свободной энергии в явном виде:

$$\delta F = \delta \int f\,d\tau = \int \left\{a\psi + b\psi^*\psi\psi + c\left[\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi\right] \times \right. \\ \left. \times \left[\nabla + \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right]\right\}\delta\psi^*\,d\tau + \text{компл. сопр.} + c\int\left[\frac{iq^*\psi^*}{\hbar c}\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi + \right. \\ \left. + \text{компл. сопр.}\right]\delta\mathbf{A}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int(\nabla\times\nabla\times\mathbf{A})\cdot\delta\mathbf{A}\,d\tau;$$

ее нужно положить равной нулю. Проведя интегрирование по частям в первом слагаемом, содержащем $\nabla\delta\psi^*$, мы получаем выражение, в котором вариация $\delta\psi^*$ фигурирует просто как множитель и, следовательно, коэффициент при нем должен равняться нулю. Таким образом,

$$a\psi + b\psi^*\psi\psi - c\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)^2 \psi = 0. \tag{5.87}$$

Комплексно сопряженное слагаемое в вариации свободной энергии приводит, конечно, к уравнению, комплексно сопряженному этому. Мы опустили возникающий при интегрировании по частям поверхностный интеграл, который, как можно показать, обращается в нуль, если на поверхности обращается в нуль нормальная к ней компонента тока.

Два последних интеграла дают уравнение для **A**. Поскольку, однако, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ равен $4\pi\mathbf{j}/c$ где $\mathbf{j}$ — плотность тока, это уравнение можно использовать для определения последней:

$$\mathbf{j} = -\frac{iq^*c}{\hbar}\psi^*\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi + \text{компл. сопр.} \tag{5.88}$$

Теперь можно переписать коэффициент $c$ в иной форме. Плотность тока должна быть пропорциональной плотности сверхпроводящих электронов, тогда как мы приняли для $\psi$ такую нормировку, в которой $\psi^*\psi$ есть *доля* таких электронов. Поэтому нужно ввести множитель $n^*$ порядка плотности электронов. Далее, чтобы записать ток в естественных единицах, следует ввести множитель с размерностью обратной массы. Введем для этого величину $m^*$, которая имеет порядок массы электрона. Таким образом константу $c$ можно представить в виде $\hbar^2 n^*/2m^*$, и уравнения (5.87) и (5.88) примут вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)^2\psi + \frac{m^*a}{mn^*}\psi + \frac{m^*b}{mn^*}\psi^*\psi\psi = 0, \tag{5.89}$$

$$\mathbf{j} = \frac{n^*\hbar q^*}{2im^*}\left[\psi^*\left(\nabla - \frac{iq^*\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi - \text{компл. сопр.}\right]. \tag{5.90}$$

В результате мы пришли к уравнению (5.89), похожему на уравнение Шредингера, и к обычному квантовомеханическому выражению (5.90) для плотности тока частиц с массой $m^*$ и зарядом $q^*$. Существенной особенностью уравнения (5.89) является его нелинейность, играющая огромную роль в приложениях теории. Если заменить $q^*$ зарядом электронов $-e$, $m^*$ — электронной массой $m$, а $n^*$ — плотностью электронов, то мы придем к уравнениям Гинзбурга — Ландау, полученным ими в 1950 г. Если же $q^*$ заменить на $-2e$, т. е. на заряд куперовской пары, $m^*$ — на $2m$, т. е. на массу куперовской пары, $n^*$ — на половину электронной плотности, то мы получим уравнения Гинзбурга — Ландау в том виде, в котором они используются ныне.

Сейчас мы убедимся в мощи этой феноменологической теории. При данном выборе $m^*$, $q^*$ и $n^*$ в теорию входят лишь два параметра $\alpha$ и $\beta$, определяющие, согласно соотношению (5.83), константы

$a$ и $b$ при любой температуре, близкой к критической. Два этих параметра можно определить по двум экспериментам, а уж с их помощью можно вычислить множество свойств данного сверхпроводника.

Одной из таких экспериментально определяемых величин служит, конечно, разность свободных энергий нормального и сверхпроводящего состояний, которая, согласно выражению (5.82), задает величину $a^2/b$, или, что то же самое, $\alpha^2/\beta$.

Фактически находить эту величину удобнее не прямо, а путем измерения *критического поля*. Связь между двумя этими величинами следует из выражения (5.86). В отсутствие магнитного поля последнее слагаемое в нем обращается в нуль, и мы получаем разность свободных энергий, выраженную через параметр порядка. Если же к такой системе приложить магнитное поле, то, как хорошо известно, оно не проникает в глубь сверхпроводника. Это — эффект Мейсснера. Таким образом связанная со сверхпроводимостью энергия конденсации практически не изменится, т. е. параметр порядка в массиве сверхпроводника останется прежним. Энергия же магнитного поля, равная последнему слагаемому выражения (5.86), окажется большей вследствие того, что в присутствии сверхпроводника поле деформируется так, что его силовые линии огибают сверхпроводник. Эта дополнительная энергия равна величине $H^2/8\pi$, умноженной на объем сверхпроводника, в чем можно убедиться, исходя из термодинамических соображений [22]. Если поле увеличивается настолько, что эта дополнительная энергия оказывается больше связанного со сверхпроводящим переходом выигрыша в энергии, то свободная энергия окажется меньше, когда металл перейдет в нормальное состояние и поле окажется однородным. Таким образом, разница в плотности свободных энергий между нормальным и сверхпроводящим состояниями равна $H_c^2/8\pi$. Воспользовавшись соотношением (5.82), получим

$$\frac{a^2}{b}=\frac{H_c^2}{4\pi}. \tag{5.91}$$

Мы увидим, что на самом деле магнитное поле в какой-то мере проникает в сверхпроводник. Слабое поле проникает в сверхпроводник, затухая как

$$H_0e^{-z/\lambda(T)},$$

где *глубина проникновения* $\lambda$ определяется через $a$ и $b$ соотношением

$$\frac{a}{b}=-\frac{m^*c^2}{4\pi n^*q^*\lambda(T)^2}. \tag{5.92}$$

Соотношения (5.91) и (5.92) выражают величины $a$ и $b$ через экспериментально измеряемые параметры.

Уравнения Гинзбурга — Ландау были получены Горьковым [24], исходя из микроскопической теории. (Основные моменты этого вывода содержатся в книге Шриффера [12].) В результате получаются указанные выше значения эффективного заряда, эффективной массы и $n^*$. Показано также, что, как мы уже говорили выше, параметр порядка $\psi$ пропорционален локальному значению энергетической щели $\Delta$, фигурирующей в микроскопической теории. Это согласуется с выражениями (5.80), (5.81) и (5.83), из которых следует, что величина $\psi^*\psi$ пропорциональна $(T - T_c)$, а также согласуется с выражением (5.82), согласно которому энергия конденсации пропорциональна $(T - T_c)^2$, в то время как энергия конденсации, согласно микроскопической теории, равна $n(E_F)\,\Delta_0^2/4$.

### 3. Приложения теории Гинзбурга — Ландау

Хотя уравнения Гинзбурга — Ландау и можно вывести из микроскопической теории, они предшествовали ей и ее следует считать самостоятельным разделом теории сверхпроводимости. Далее, при изучении сложных ситуаций с помощью теории Гинзбурга — Ландау результаты в большинстве случаев выражаются через такие параметры, которые непосредственно следуют из эксперимента, а не из микроскопической теории. Поэтому на практике она часто используется как самостоятельная теория, и именно с этой точки зрения будут рассматриваться здесь ее приложения.

Существование связи между микроскопической и феноменологической теориями дает как понимание сверхпроводимости, так и методы вычисления параметров теории из первых принципов. Поэтому в некоторых местах окажется полезным обращаться к результатам микроскопической теории.

*Решение для нулевого поля.* В отсутствие магнитного поля первое уравнение Гинзбурга — Ландау (5.89) имеет простое решение. Положив **A** равным нулю, а $\psi$ — константой, мы приходим к решению

$$\psi^*\psi = -\frac{a}{b}.$$

Из выражения (5.90) видно, что ток в этом случае равен нулю. Значение параметра порядка совпадает с тем, которое получается из уравнений (5.80) и (5.81). Заметим, что мы определили параметр порядка, не нормировав его. Фактически параметром разложения для системы единичного объема служит интеграл

$$\int \psi^*\psi\, d\tau.$$

Уравнение (5.89) при $\mathbf{A} = 0$ имеет решение в виде плоской волны

$$\psi = \psi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}.$$

Если подставить его в выражение (5.90), то мы увидим, что оно отвечает однородной плотности тока:

$$\mathbf{j}=\frac{n^*\hbar q^*\mathbf{k}}{m^*}\psi^*\psi.$$

Это решение соответствует обсуждавшемуся уже в п. 3 § 9 дрейфовому состоянию; ток, пущенный в сверхпроводящем кольце, будет течь по нему сколь угодно долго без всякого затухания. Следует отметить, что это не есть основное состояние системы и существуют процессы, которые могут вернуть систему в основное состояние. Однако для этого требуется макроскопически большая энергия активации, и поэтому такие процессы в высшей степени маловероятны.

Важно обратить внимание на то, что ток приводит к появлению отличного от нуля векторного потенциала, так что такое решение не самосогласованно. Векторный потенциал в случае текущего вдоль направления $z$ однородного тока $\mathbf{j}$ равен

$$\mathbf{A}=-\frac{2\pi\mathbf{j}x^2}{c}.$$

Полученное решение тем не менее очень близко к самосогласованному в случае очень тонкой проволоки или пленки, так как в этом случае величина $x^2$ внутри сверхпроводника мала. Поскольку такая геометрия сверхпроводников представляет особый интерес и в этом простом случае, когда полем можно пренебречь, особенно ясна физическая суть, мы продвинемся здесь несколько дальше.

В этом состоянии величина параметра порядка, а следовательно, энергетической щели и плотности сверхпроводящих электронов всюду одинакова. Однако фаза параметра порядка (или параметра энергетической щели) меняется с координатой, и именно это изменение приводит к возникновению тока.

Можно получить величину плотности тока как функцию волнового вектора $\mathbf{k}$, подставив в выражение (5.89) параметр порядка, имеющий вид плоской волны, и опять-таки опустив слагаемое с векторным потенциалом. Можно найти и величину параметра порядка

$$\psi_0^*\psi_0=\frac{-a}{b}-\frac{n^*\hbar^2k^2}{2m^*b}.$$

Вспомнив, что величина $a$ — отрицательная, мы видим, что параметр порядка падает с ростом $k$. Используя этот результат и выражение (5.90), получаем плотность тока

$$\mathbf{j}=\frac{\hbar q^*\mathbf{k}n^*\psi_0^*\psi_0}{m^*}=\frac{\hbar q^*\mathbf{k}n^*}{m^*b}\left(-a-\frac{n^*\hbar^2k^2}{2m^*}\right).$$

С увеличением $k$ ток растет, достигает максимума и опять падает до нуля. Легко вычислить максимально достижимое значение тока:

$$j_c = \frac{q^* \sqrt{n^*}}{\sqrt{m^*}\, b} \left( -\frac{2a}{3} \right)^{3/2}.$$

Система не может переносить больший сверхпроводящий ток и переходит в нормальное состояние, если плотность тока превзойдет эту *критическую плотность тока*. Мы уже обсуждали факт существования критической плотности тока в связи с теорией БКШ. Там мы обращали внимание на возникающую при этом хитрость. Важно отметить, что, пренебрегая и там и здесь собственным магнитным полем этого тока, мы ограничиваемся тем самым вполне определенной формой сверхпроводника.

*Неоднородные системы.* Выше мы рассматривали случай однородных сверхпроводников. Теория Гинзбурга — Ландау особенно важна для изучения таких систем, где $|\psi|$ меняется в пространстве. Решить эту задачу точно очень сложно, что связано с нелинейностью уравнения (5.89). Для малых отклонений от однородности, однако, его можно линеаризовать. Мы будем полагать параметр порядка действительным и затем убедимся, что это предположение согласуется с полученными результатами. Далее мы выбросим векторный потенциал, и поскольку полученные таким образом решения будут отвечать нулевому току, они окажутся самосогласованными и в этом смысле.

Представим параметр порядка в виде постоянной величины $\psi_0$, к которой добавляется малое слагаемое $\psi_1$, меняющееся с координатой. Подставив

$$\psi = \psi_0 + \psi_1$$

в уравнение (5.89) и выделив слагаемое нулевого и первого порядков по $\psi_1$, получим

$$a\psi_0 + b\psi_0^3 = 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_1 + \frac{m^* a}{mn^*} \psi_1 + \frac{3m^* b}{mn^*} \psi_0^2 \psi_1 = 0.$$

Решив первое из этих уравнений относительно $\psi_0^2$ и подставив решение во второе, найдем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_1 - \frac{2m^* a}{mn^*} \psi_1 = 0.$$

Мы видим, что имеется естественная единица измерения длины, характеризующая пространственные изменения параметра порядка. Она называется *длиной когерентности* $\xi(T)$ и определяется как

$$\xi(T) = \sqrt{-\frac{\hbar^2 n^*}{2m^* a}}. \tag{5.93}$$

Ясно, что существуют решения, спадающие в одном направлении как

$$e^{-\sqrt{2}\,z/\xi},$$

или сферически симметричное решение вида

$$e^{(-\sqrt{2}\,r/\xi)}/r.$$

Сверхпроводящая волновая функция обладает некоей «неподатливостью», препятствующей изменениям параметра порядка на длинах меньше длины когерентности.

Длина когерентности входит естественным образом и в микроскопическую теорию. Сверхпроводящее состояние строится из линейных комбинаций волновых функций, отвечающих интервалу энергий порядка $\Delta$. Степень локализации такого когерентного состояния ограничивается возможностью локализовать волновые пакеты, построенные из волновых функций, относящихся к этому интервалу. Однако эта степень локализации определяется длиной порядка

$$\frac{(\partial E/\partial k)_{k_F}}{\Delta}=\frac{\hbar v_F}{\Delta},$$

которая с точностью до числовых постоянных совпадает с длиной когерентности сверхпроводника. В микроскопической теории длина когерентности определяется обычно как

$$\xi_0=\frac{\hbar v_F}{\pi\Delta}.$$

Полагая щель величиной порядка 1 мэВ, а фермиевскую скорость — величиной порядка $10^8$ см/с, мы приходим к длине когерентности, равной 2000 Å.

*Случай приложенного магнитного поля.* Второй характерной длиной сверхпроводника служит упомянутая нами ранее глубина проникновения слабого магнитного поля. Рассмотрим полубесконечный сверхпроводник, занимающий область $z>0$, и приложим слабое магнитное поле, направленное вдоль оси $y$. При $z<0$ поле постоянно и равно $H_0$. Возьмем ротор от обеих частей выражения для тока (5.90). Тогда можно видеть, что в низшем порядке по магнитному полю в правой части остается лишь слагаемое $\nabla\times\mathbf{A}$. В этом легко убедиться, представив параметр порядка опять в виде суммы постоянного слагаемого и малой добавки первого порядка по $H$, зависящей от координат. Выражение

$$\nabla\times(\psi^*\nabla\psi)$$

содержит такие слагаемые, как

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{x}.$$

тогда как члены вида

$$\frac{\psi^*\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\,\hat{x}$$

в выражении для тока взаимно уничтожаются. Поэтому величина второго порядка по $\psi_1$ мала по сравнению со слагаемым, содержащим $\nabla \times \mathbf{A}$. Таким путем, беря ротор от уравнения (5.90), находим

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{n^*q^{*2}\psi_0^*\psi_0}{m^*c}\,\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{n^*q^{*2}\psi_0^*\psi_0}{m^*c}\,\mathbf{H},$$

где $\psi_0$ — значение параметра порядка в нулевом поле. Подставив это выражение в уравнение, получающееся взятием ротора от одного из уравнений Максвелла,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c},$$

приходим к следующему уравнению для магнитного поля:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi q^{*2}n^*}{m^*c^2}\,\psi_0^*\psi_0\mathbf{H}.$$

Для направленного вдоль оси $y$ поля оно имеет решение

$$H = H_0 e^{-z/\lambda},$$

где *глубина проникновения* $\lambda$ задается выражением

$$\left[\frac{1}{\lambda(T)}\right]^2 = \frac{4\pi n^*q^{*2}\psi_0^*\psi_0}{m^*c^2} = -\frac{4\pi n^*q^{*2}a}{m^*c^2 b}. \tag{5.94}$$

Мы видим, что, как это уже говорилось в п. 2 § 10, глубина проникновения зависит от отношения $a/b$.

Подчеркнем, что и глубина проникновения (5.94), и длина когерентности (5.93) зависят от температуры как $a^{-1/2}$, т. е. вблизи критической точки они ведут себя как $(T_c - T)^{-1/2}$. Следовательно, их отношение есть характеризующая сверхпроводник и не зависящая от температуры безразмерная константа. Это отношение

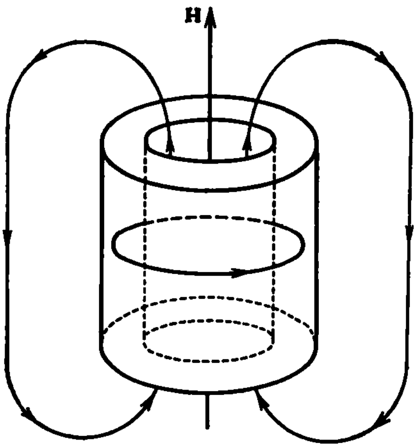
$$\varkappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

носит название *параметра Гинзбурга — Ландау*.

В простых и достаточно чистых металлах параметр Гинзбурга — Ландау оказывается меньшим единицы. Такие вещества называются *сверхпроводниками первого рода*. В случае достаточно грязных простых металлов и сверхпроводящих переходных металлов параметр Гинзбурга — Ландау превосходит единицу. Такие вещества называют *сверхпроводниками второго рода*. Вряд ли покажется удивительным, что поведение двух этих типов сверхпроводников при приложенных полях резко различается.

### 4. Квантование потока

Будем рассматривать многосвязный сверхпроводник, например сверхпроводящее кольцо (фиг. 161). Сквозь такое кольцо может проходить магнитное поле, но в толще сверхпроводника оно равно нулю. Далее, поскольку поле в массиве сверхпроводника обращается в нуль, там равна нулю и плотность тока, пропорциональная




Фиг. 161. Сверхпроводящее кольцо, охваченное магнитным полем **H**. На контуре l, проходящем в массиве сверхпроводника, плотность тока j равна нулю, и поэтому интеграл $\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{l} = 0$.

ротору магнитного поля. Ток отличен от нуля лишь в области вблизи поверхности порядка глубины проникновения. Поэтому можно выбрать такой путь интегрирования внутри кольца, что вдоль этого пути ток равен нулю. Проинтегрируем теперь вдоль этого контура выражение для тока (5.90)

$$\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{l}=\frac{n^*\hbar q^*}{2im^*}\left[\oint \psi^*\nabla\psi\cdot d\mathbf{l}-\frac{iq^*}{\hbar c}\oint \psi^*\psi\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}\right]+\text{компл. сопр.}.$$

Модуль параметра порядка мы полагаем одним и тем же вдоль всего контура интегрирования, но его фаза может меняться. Таким образом, параметр порядка на контуре l имеет вид

$$\psi=\psi_0 e^{i\theta(l)}.$$

Тогда величину $\psi^*\psi$, входящую во второе слагаемое выражения для тока, можно вынести за знак интеграла, а интеграл

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

есть просто проходящий через кольцо магнитный поток Ф. Интеграл же

$$\oint \psi^*\nabla\psi\cdot d\mathbf{l}=i\psi_0^*\psi_0\oint \nabla\theta(\mathbf{l})\cdot d\mathbf{l}$$

равен просто величине $i\psi_0^*\psi_0$, умноженной на полное изменение фазы $\theta$ при одном обходе по контуру. Параметр порядка должен быть однозначной функцией, но фаза $\theta$ может, конечно, измениться при этом на величину $2\pi$, умноженную на целое число. Поскольку

$$\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{l}=0,$$

слагаемые с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ и градиентом параметра порядка $\nabla\psi$ должны взаимно уничтожиться, что и приводит к правилу квантования содержащегося в кольце потока:

$$\Phi=\frac{2\pi\hbar c}{q^*}n, \tag{5.95}$$

где $n$ — целое число. Поток, проходящий через сверхпроводящее кольцо, может быть лишь целым кратным от *кванта потока*, равного $\hbar c/q^*$. Его величина, конечно, очень мала и отвечает потоку, обусловленному магнитным моментом одного электрона. Такое квантование магнитного потока было подтверждено экспериментально [25, 26]. Оказалось, что эффективный заряд равен удвоенному заряду электрона. Доказательство соотношения (5.95) основывается на том обстоятельстве, что сверхпроводник достаточно толстый и есть возможность выбрать в его толще область, где ток равен нулю. Если это не так, то необходимо внести соответствующие изменения.

Что же будет, если сверхпроводник не многосвязный? Ясно, что если поместить тонкую пластинку сверхпроводника в нормальное к его поверхности магнитное поле, то состояние, в котором магнитное поле вытеснено из всего сверхпроводника, не будет иметь наинизшую энергию, поскольку в этом случае очень большой окажется энергия магнитного поля. Ясно далее, что свободная энергия не станет наименьшей и в том случае, когда вся система перейдет в нормальное состояние, так как возникнет проигрыш в энергии конденсации. Можно ожидать, что минимуму энергии отвечает такая конфигурация, в которой линии магнитного поля пронизывают сверхпроводящую пластинку в виде маленьких пучков, распределенных по всей поверхности. Это позволяет не проиграть в энергии конденсации, хотя и требует возникновения областей сверхпроводника, находящихся в нормальном состоянии, и в то же время существенно снижает энергию магнитного поля. Такое состояние системы известно под названием *промежуточного*.

Соображения, приведенные в связи с квантованием потока, справедливы по отношению к каждому из таких пучков, поэтому поток в каждом из них должен быть квантован. Оказывается, что минимуму энергии отвечает обычно один квант потока, пронизывающий сверхпроводящую пластинку. Это так называемые *вихревые нити* в сверхпроводнике. Каждая из них представляет собой один квант потока и связана с текущим вокруг нее сверхпроводящим током. В сверхпроводниках второго рода такие вихревые нити возникают не только в случае тонкой пластинки.

### 5. Флуктуации в сверхпроводниках

В теории Гинзбурга — Ландау состояние сверхпроводящих электронов описывается с помощью точно определенного параметра порядка $\psi$. Рассматривая этот параметр как сверхпроводящую волновую функцию, мы можем представить себе, что существуют «соседние» состояния с той же энергией, и вблизи температуры перехода, где справедлива теория Гинзбурга — Ландау, система описывается с помощью статистического распределения по таким состояниям. Используемый же нами параметр порядка представляет собой в действительности некое среднее значение, и можно полагать, что около этого среднего возникают тепловые флуктуации. Флуктуации такого рода при близких к критической температурах стали в последние годы предметом интенсивного исследования и не только в сверхпроводниках, но и в других системах, претерпевающих фазовый переход. Сейчас мы продемонстрируем, как можно их исследовать в рамках теории Гинзбурга — Ландау.

Рассмотрим однородный сверхпроводник в отсутствие поля. Представим параметр $\psi$ в виде суммы постоянного слагаемого $\psi_0$ и флуктуационной добавки, которую мы разложим в ряд Фурье:

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k} a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{5.96}$$

Будем полагать, что такому состоянию отвечает точно определенная энергия $E(\{a_k\})$, зависящая от всех параметров $\{a_k\}$. Вероятность найти систему со значениями параметров в интервале

$$d\{a_k\} = da_{k_1}\, da_{k_2} \ldots$$

дается выражением

$$dP = d\{a_k\}\, P(\{a_k\})\, e^{-E(\{a_k\})/KT}, \tag{5.97}$$

где $P(\{a_k\})$ — соответствующий статистический вес, зависящий от числа микроскопических состояний, отвечающих данной совокупности значений $\{a_k\}$. Мы не знаем этой функции, но если записать ее в виде

$$P(\{a_k\}) = e^{[(KT/KT)\ln|P(\{a_k\})|]} = e^{TS/KT},$$

причем

$$S = K \ln |P(\{a_k\})|$$

есть с точностью до постоянного слагаемого энтропия системы, то вероятность (5.97) оказывается равной просто

$$d\{a_k\}\, e^{-F(\{a_k\})/KT},$$

где $F$ — опять-таки *свободная энергия* системы. Поэтому вероятность можно вычислить с помощью выражения (5.85) для плотности свободной энергии.

Подставляя разложение (5.96) для $\psi$ в (5.85) и интегрируя по объему $\Omega$, в низшем порядке по $\{a_k\}$ получаем

$$F = F_n + \Omega\left[a\psi_0^*\psi_0 + \frac{b}{2}(\psi_0^*\psi_0)^2 + \sum_k a_k^* a_k (a + 2b\psi_0^*\psi_0 + k^2 c)\right]. \quad (5.98)$$

Мы опустили слагаемые типа $a_k a_{-k}$ и $a_k^* a_{-k}^*$, поскольку фазы различных флуктуаций считаем независимыми и такого рода слагаемые при статистическом усреднении обращаются в нуль [1]).

Найдем теперь $\psi_0$, минимизируя свободную энергию (5.98) по $\psi_0$ в нулевом по $a_k^* a_k$ порядке. Тогда

$$a + b\psi_0^*\psi_0 = 0,$$

откуда следует, что

$$F = F_n + \Omega\left[-\frac{b\psi_0^*\psi_0}{2} + \sum_k a_k^* a_k (-a + k^2 c)\right].$$

Первое слагаемое можно включить в нормировочный множитель выражения для вероятности, и тогда легко вычислить среднеквадратичную флуктуацию для данного $\mathbf{k}$:

$$\left\langle a_k^* a_k \right\rangle = \frac{\int e^{-a_k^*(-a+k^2c)\Omega/KT} a_k^*\, da_k}{\int e^{-a_k^*(-a+k^2c)\Omega/KT}\, da_k} = \frac{KT}{2(-a+k^2c)\Omega}.$$

Это выражение позволяет оценить амплитуду флуктуаций в области применимости теории Гинзбурга — Ландау, т. е. вблизи критической температуры и для длин волн, много больших длины коге-

[1]) Это утверждение неверное. При $T > T_c$ такие слагаемые отсутствуют, поскольку они, как легко увидеть из (5.85), пропорциональны $\psi_0^{*2}$ и $\psi_0^2$ соответственно. Ниже точки перехода их учет приводит к появлению флуктуаций, пропорциональных $KT/ck^2$. Суммирование по $\mathbf{k}$ до величины порядка $1/\xi$ дает, однако, тот же результат, что и полученный автором ниже. Следует особо подчеркнуть, что эти флуктуации тесно связаны с флуктуациями фазы $\psi$, в чем легко убедиться, записав $\psi$ в виде $|\psi|\, e^{i\theta}$ и подставив это выражение в (5.85). Тогда свободная энергия примет форму

$$F = \int d\tau \left(a|\psi|^2 + \frac{b}{4}|\psi|^4 + c\,\frac{1}{2|\psi|^2}(\nabla|\psi|^2)^2 + c|\psi|^2(\nabla\theta)^2\right).$$

Именно последнее слагаемое этого выражения и ответственно за появление указанных флуктуаций.— *Прим. ред.*

рентности. Как мы уже говорили в п. 3 настоящего параграфа, «жесткость» сверхпроводящей волновой функции подавляет флуктуации с меньшими длинами волн. Следует обратить внимание на то, что в знаменателе выражения для флуктуаций возник полный объем системы. Однако при вычислении любых зависящих от флуктуаций характеристик необходимо проводить суммирование по $\mathbf{k}$. При переходе от этой суммы к интегралу появляется множитель $\Omega/(2\pi)^3$, который определяет плотность состояний, и объем в знаменателе сокращается. В частности, выражение для среднеквадратичной флуктуации в любой точке обычного пространства сверхпроводника задается суммой от $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ по всем волновым векторам. Эта сумма на больших $k$ расходится и суммирование следует ограничить волновыми векторами, меньшими или равными величине порядка $2\pi/\xi$ (где $\xi$ — длина когерентности), поскольку теория Гинзбурга — Ландау при больших волновых векторах неприменима. Это приводит к тому, что полный объем $\Omega$ заменяется *объемом когерентности* $\xi^3$. Таким образом,

$$\sum_k \langle a_k^\dagger a_k \rangle \approx \frac{KT}{2(-a)\xi^3}; \tag{5.99}$$

при этом мы пренебрегли в знаменателе величиной $ck^2$ по сравнению с $-a$.

Чтобы понять этот результат, разумно сравнить среднеквадратичные флуктуации с квадратом модуля параметра порядка, $|\psi_0|^2$, задаваемым соотношением (5.81). Напомним, что разница в свободных энергиях $\Delta f$ единицы объема между нормальным и сверхпроводящим состояниями определяется соотношением (5.82) и равна $a^2/2b$. Тогда формула (5.99) с точностью до числовых множителей принимает вид

$$\frac{\sum_k \langle a_k^\dagger a_k \rangle}{\psi_0^\dagger \psi_0} \approx \frac{KT}{\Delta f \xi^3}.$$

Таким образом, среднеквадратичная относительная флуктуация при любой данной температуре равна величине $KT$, поделенной на энергию, требуемую для того, чтобы при данной температуре перевести объем когерентности из сверхпроводящего в нормальное состояние. Грубо говоря, жесткость сверхпроводящей функции не дает возможности перевести данную точку сверхпроводника в нормальное состояние без того, чтобы не перешел в нормальное состояние и окружающий ее когерентный объем. Флуктуации очень малы, однако они становятся существенными при температурах, очень близких к температуре перехода.