ЗАДАЧИ

1. В вырожденном электронном газе с равной заселенностью состояний с противоположными спинами при перевороте малого числа спинов происходит увеличение кинетической энергии, что связано с изменениями двух соответствующих противоположным спинам ферми-импульсов. Обменная же энергия при этом падает. Это уменьшение может превзойти увеличение кинетической энергии при достаточно низкой электронной плотности или большой эффективной массе. Найдите эффективную массу, при которой немагнитное состояние становится неустойчивым при учете этих двух составляющих энергии, и вычислите эту массу электронного газа с электронной плотностью, отвечающей алюминию ($k_F = 0{,}927$ ат. ед.).

2. Рассмотрим систему N спинов (величина каждого из них равна $^1/_2$), взаимодействующих друг с другом с одинаковой интенсивностью, так что обменный гамильтониан

$$\mathscr{H}=J\sum_{i>j,\,j} \mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j=\frac{J}{2}\sum_{i,\,j}{}' \mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j,$$

где $J > 0$. (Возьмите четное N.) Здесь штрих означает отсутствие слагаемых с $i = j$.

а. Каково точное основное состояние системы? (Указание: оно должно быть также собственным состоянием оператора $\mathbf{S}^2$, где $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i$.) Каков полный спин в основном состоянии?

б. Каково среднее значение оператора

$$\mathscr{H}_I=J\sum_{i>j,\,j} S_i^z S_j^z=\frac{J}{2}\sum_{i,\,j}{}' S_i^z S_j^z$$

в антиферромагнитном состоянии, изображенном на фиг. 145 и в найденном в задаче «а» основном состоянии?

3. Рассмотрим три магнитных иона, со спином $^1/_2$ каждый, связанные друг с другом гейзенберговским обменом. Пусть приложено внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$, так что гамильтониан имеет вид

$$\mathscr{H}=-\sum_{i,\,j}{}' J\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j-2\mu_0\sum_i \mathbf{H}\cdot\mathbf{S}_i.$$

В модели Изинга состояния задаются спином ($+^1/_2$ или $-^1/_2$) отдельных ионов ($\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j = \pm^1/_4$). Взяв среднее статистическое по восьми таким состояниям, найдите величину намагниченности

$$\langle M\rangle=2\mu_0\langle \mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2+\mathbf{S}_3\rangle$$

и восприимчивость

$$\left.\frac{\partial\langle M\rangle}{\partial H}\right|_{H=0}.$$

(В ответ должна войти величина μ_0^2, и переходить там к величине $\langle\mu^2\rangle$ не нужно.)

4. Мы представляли магноны с помощью линейной комбинации состояний, отвечающих перевороту отдельных спинов. В одномерных ферромагнетиках можно попытаться построить возбужденные состояния, отвечающие перевороту пары соседних спинов:

$$\Psi=A\sum_n S_n^- S_{n+1}^- \Psi_0 e^{iqan}.$$

Такое состояние есть приближенное собственное состояние системы. Параметр A — нормировочная постоянная.

а. Покажите, что это не есть собственное состояние системы, использовавшееся для построения магнонов. Какие дополнительные слагаемые нужно добавить, чтобы это было так? (Речь идет не о коэффициентах, а о комбинации спиновых операторов.)

б. Если обменный гамильтониан Гейзенберга заменить здесь моделью Изинга со взаимодействием ближайших соседей, то энергия магнона окажется равной $2JS$ и не зависящей от q. Какова энергия указанного выше состояния в модели Изинга?

Рассматривая пару взаимодействующих магнонов как связанные частицы, найдите энергию связи. Связанные магноны обсуждаются в работе [27].

5. Рассмотрим простой металл с локальным моментом (спин $^1/_2$) на растворенном в нем атоме переходного металла. Пусть приближенный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_k E_k (n_{k+} + n_{k-}) + E_d (n_{d+} + n_{d-}) + U n_{d+} n_{d-} - \frac{J}{N} \sum_{\substack{k, k' \\ \sigma, \sigma'}} c^+_{k'\sigma'} \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{S}_\sigma c_{k\sigma}.$$

Операторы S_σ действуют на спиновые состояния, обозначаемые с помощью индекса σ. Найдите выражение для полной вероятности рассеяния, вызываемого примесью и описываемого последним слагаемым гамильтониана, из состояния:

$$c^+_{k_0\sigma_0} \prod_{k<k_F} c^+_{k+} c^+_{k-} c^+_{d+} | 0 \rangle,$$

где $k_0 > k_F$. Учитывайте только такие процессы, в которых из состояния $k_0\sigma_0$ электрон уходит, а саму вероятность вычисляйте лишь с точностью до J^2, рассматривая, однако, при этом как случай $\sigma_0 = +$, так и $\sigma_0 = -$. В ответе не должно содержаться никаких операторов.

6. Рассмотрим металл, описываемый редуцированным гамильтонианом БКШ,

$$\mathcal{H} = \sum_k 2\varepsilon_k b^+_k b_k + \sum_{k, k'} V_{kk'} b^+_{k'} b_k;$$

положим, что взаимодействие

$$V_{kk'} = \lambda | \varepsilon_k || \varepsilon_{k'} |$$

при

$$| \varepsilon_k | < \hbar\omega_D \quad \text{и} \quad | \varepsilon_{k'} | < \hbar\omega_D$$

и равно нулю для других значений энергии. Здесь энергия ε_k отсчитывается от энергии Ферми.

а. Найдите Δ_k, решая уравнение для щели, и выпишите критерий существования сверхпроводимости. [Это должно быть условие на параметр $N(0)\,\lambda\,(\hbar\omega_D)^2$, необходимое для существования решения с действительным Δ_k.]

б. Нарисуйте плотность возбужденных состояний как функцию энергии (внутри и вне интервала $\hbar\omega_D$). Этот случай отвечает «бесщелевому сверхпроводнику».

7. Вычислите критическую температуру сверхпроводника в простой модели. Уравнение для щели при $T = 0$, т. е.

$$1 = \frac{Vn(E_F)}{4} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{dE}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}},$$

мы получили, предполагая, что сверхпроводящее состояние строится из всех одноэлектронных состояний.

Из-за теплового возбуждения квазичастиц при конечной температуре для построения сверхпроводящего состояния оказывается возможным использовать лишь часть состояний, отвечающих парам. Поэтому подынтегральное выражение следует умножить (см. [13]) на

$$\operatorname{th}\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2}}{2KT}.$$

Этот множитель отличается от того, что можно было бы получить, исходя из простейших соображений, однако он, как и ожидалось, приближается к нулю для энергий возбуждения, много меньших KT, и стремится к единице в противоположном пределе.

а. Найдите критическую температуру T_c, определяя ее как температуру, при которой Δ обращается в нуль. Под интегралом для простоты полагайте, что

$$\operatorname{th} x \to \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

б. Сравните величину KT_c со значением Δ при $T = 0$ при условии, что $e^{2/n(E_F)V} \gg 1$.

8. Рассмотрим схему на фиг. 158 в случае большого приложенного напряжения V_0. Если емкость C велика, то через сопротивление R не течет почти никакого тока, а ток, идущий через емкость и джозефсоновский переход, будет равен

$$J_1 \sin\frac{2eVt}{\hbar}.$$

В цепи не рассеивается никакая мощность, и батарея не совершает никакой работы.

а. Определите ток через сопротивление R в низшем по $1/C$ порядке и из закона сохранения энергии найдите, какой дополнительный ток должен идти в цепи. [Он окажется величиной порядка $(1/C)^2$.]

б. Какая причина заставляет течь через переход этот дополнительный ток?

9. Согласно теории Гинзбурга — Ландау, свободная энергия сверхпроводника задается выражением

$$f = f_n + a|\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi|^4 + c|\nabla\psi|^2,$$

где величина

$$a(T) = \frac{\alpha(T - T_c)}{T_c}.$$

ниже критической температуры отрицательна. Естественно распространить это выражение, положив в нем величины α, $b = \beta$ и c константами, и на область температур, бо́льших T_c, хотя там устойчиво нормальное состояние с $n_s = 0$.

а. Постройте *линеаризованное* уравнение Гинзбурга — Ландау для материала при температуре выше T_c и найдите его решение, меняющееся в одном направлении.

б. Используя этот результат для нормального металла с параметрами α_1, β_1, c_1, $T_{c1} < T$, найдите параметр порядка как функцию расстояния от плоскости, разделяющей нормальный металл и сверхпроводник с параметрами α_0, β_0, c_0, $T_{c0} > T$.

Линеаризуйте уравнение для сверхпроводника по отклонениям от величины ψ_0. Параметр порядка полагайте всюду непрерывным и получите условие на его производную, исходя из требования непрерывности тока (5.88) на границе раздела.

в. Нарисуйте изменения параметра порядка для системы, состоящей из двух одинаковых сверхпроводников, разделённых пленкой нормального металла. Такая пленка может обусловливать слабую связь между сверхпроводниками так же, как и в эффекте Джозефсона.

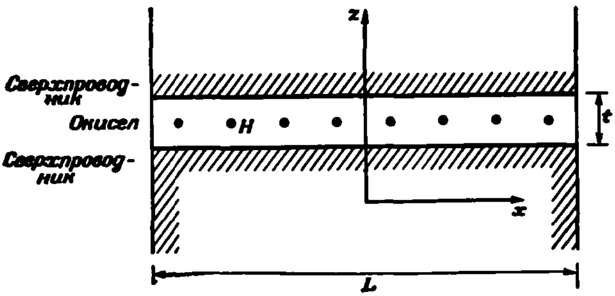
10. Рассмотрите джозефсоновский переход с однородным магнитным полем в пленке окисла (см. ниже), используя параметр порядка теории Гинзбурга — Ландау ψ. В верхнем сверхпроводнике (за пределами слоя толщиной в глубину проникновения, которую мы полагаем здесь равной нулю) ψ можно представить в виде

$$\psi_+(x) = \psi_0 e^{i(\alpha x + \delta\varphi)},$$

где ψ_0 и $\delta\varphi$ — постоянные. В нижнем сверхпроводнике

$$\psi_-(x) = \psi_0 e^{-i\alpha x}.$$

а. Выразите α через магнитное поле H. В интеграле по контуру вы можете пренебречь вкладом от интегрирования по отрезкам вдоль оси z на концах перехода.



б. Найдите максимальный постоянный ток $J_1(H)$, который может идти через переход. Для этого вам потребуется джозефсоновский параметр на единицу длины j_1, определяемый соотношением

$$J_1(0) = \int_{-L/2}^{L/2} j_1\,dx = Lj_1,$$

и *плотность* тока в любой точке перехода, пропорциональная величине j_1, умноженной на синус от разности фаз ψ_+ и ψ_- в этой точке.

в. Выразите J_1 через число квантов потока в переходе (оно не обязательно целое) и нарисуйте результат. (Примечание. В реальных переходах глубина проникновения обычно много больше толщины окисной пленки, и ее толщину t следует заменять величиной порядка удвоенной глубины проникновения.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herring C.*, в книге «Magnetism», eds. G. T. Rado and H. Suhl, New York, 1966.
2. *Kittel C.*, Quantum Theory of Solids, Wiley, New York, 1963. (Имеется перевод: *Киттель Ч.*, Квантовая теория твердых тел, «Наука», М., 1967.)
3. *Wakoh S.*, *Yamashita J.*, Journ. Phys. Soc. Japan, 21, 1712 (1966).

4. *Connolly J. W. D.*, Phys. Rev., **159**, 415 (1967).
5. *Stoner E. C.*, Proc. Roy. Soc., **169A**, 339 (1939).
6. *Schiff L. I.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1949. (Имеется перевод: *Шифф Л.*, Квантовая механика, ИЛ, 1959.)
7. *Anderson P. W.*, Phys. Rev., **124**, 41 (1961). (Имеется перевод в сборнике «Теория ферромагнетизма в металлах и сплавах», ИЛ, 1963, статья 15).
8. *Ruderman M. A.*, *Kittel C.*, Phys. Rev., **96**, 99 (1954).
9. *Mattis D.*, *Donath W. E.*, Phys. Rev., **128**, 1618 (1962).
10. *Kondo J.*, Journ. Appl. Phys., **37**, 1177 (1966).
11. *Rickaysen G.*, The Theory of Superconductivity, Interscience-Willey, New York, 1965.
12. *Schrieffer J. R.*, Theory of Superconductivity, Benjamin, New York, 1964. (Имеется перевод: *Шриффер Дж.*, Теория сверхпроводимости, изд-во «Наука», 1970.)
13. *de Gennes P. G.*, Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York, 1966. (Имеется перевод: *Де Жен П.*, Сверхпроводимость металлов и сплавов, «Мир», 1968.)
14. *Bardeen J.*, *Cooper L. N.*, *Schrieffer J. R.*, Phys. Rev., **108**, 1175 (1957). (Имеется перевод в сборнике: «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, статья 5.)
15. *Cooper L. N.*, Phys. Rev., **104**, 1189 (1956). (Имеется перевод в сборнике: «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960, статья 4.)
16. *Glover R. E.*, *Tinkham M.*, Phys. Rev., **108**, 243 (1957).
17. *Giaever I.*, Phys. Rev. Lett., **5**, 147, 464 (1960).
18. *Rowell J. M.*, *McMillan W. L.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 108 (1965).
19. *Боголюбов Н. Н.*, Nuovo Cimento, 7:6, 794 (1958).
20. *Josephson B. D.*, Phys. Lett. (Netherlands), **1**, 25 (1962).
21. *Ferrell R. A.*, *Prange R. E.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 479 (1963).
22. *Zemansky M. W.*, Heat and Thermodynamics, McGraw-Hill, New York, 1943.
23. *Гинзбург В. Л.*, *Ландау Л. Д.*, ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).
24. *Горьков Л. П.*, ЖЭТФ, **36**, 1918 (1959).
25. *Deaver B. S., Jr.*, *Fairbank W. M.*, Phys. Rev. Lett., 7, 43 (1961).
26. *Doll R.*, *Näbauer M.*, Phys. Rev. Lett., 7, 51 (1961).
27. *Torrance J. B., Jr.*, *Tinkham M.*, Journ. Appl. Phys., **39**, 822 (1968).
28*. *Вонсовский С. В.*, Ферромагнетизм, «Наука», 1971.
29*. *Боголюбов Н. Н.*, *Толмачев В. В.*, *Ширков Д. В.*, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, 1958.
30*. *Боголюбов Н. Н.*, *Зубарев Д. Н.*, *Церковников Ю. А.*, ЖЭТФ, **39**, 120 (1960).