§ 1.

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

«***Интегральное исчисление*** – раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями интегрального исчисления являются неопределённый интеграл и определённый интеграл. Этот раздел тесно связан с дифференциальным исчислением, вместе с которым составляет одну из основных частей математического анализа. Как дифференциальное, так и интегральное исчисление базируются на методе бесконечно малых или методе пределов».

Большой энциклопедический словарь [9]

«Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии».

В.И. Ленин

1.1. Историческая справка

В настоящее время изучение темы «интегралы» чаще всего начинают с понятия первообразной функции, потом вводят понятие неопределённого интеграла, изучают его свойства, и уже затем переходят к изучению определённого интеграла и его разновидностей (собственного и несобственного видов) и установлению тесной связи неопределённого и определённого интегралов. Однако исторически первоначально сформировалось понятие интеграла определённого.

Известно, что вплоть до конца XVII в. математики умели вычислять некоторые виды определённых интегралов, решая с их помощью отдельные практические задачи по вычислению площадей и объёмов тел, однако в то время ещё не существовало чёткого общего определения определённого интеграла. Не существовало тогда и понятия первообразной. Это было связано с недостаточным развитием теории пределов и основанного на ней дифференциального исчисления. Их развитие, в свою очередь, тормозилось отсутствием строгой теории вещественного числа.

В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий учёный *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646–1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники – *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661–1704), братья *Якоб* (1654–1705) и *Иоганн* (1667–1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707–1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были *Джон Валлис* (1616–1703) и *Исаак Барроу* (1630–1677), возглавляемая Ньютоном, состояла из английских и шотландских учёных. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698–1746). Работа обеих школ привела к большому прогрессу в области математического анализа, к созданию в достаточно законченном виде дифференциального и интегрального исчислений.

Так, Г. Лейбниц, исходя из понятия определённого интеграла, пришёл к понятию функции $F(x)$, являющейся первообразной для данной функции $f(x)$, так что $F'(x) = f(x)$. Отсюда следовало заключение о том, что дифференцирование и интегрирование являются двумя взаимно обратными операциями, вроде сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня. Вычисление интегралов Лейбниц и его ученики (первыми из которых являлись братья Я. и И. Бернулли) стали сводить к отысканию первообразных. При вычислении интегралов с определёнными пределами с помощью неопределённых интегралов как И. Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой. Среди используемых Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной, интегрирование по частям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Г. Лейбницу принадлежит также идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби, впоследствии усовершенствованная другими учёными. Именно Г. Лейбниц предложил использовать для обозначения интеграла знак $\int y dx$ (1686), где символ $\int$ есть стилизованное удлинённое S (первая буква слова ”Summa”). Термин «первообразная» (или примитивная) функция ввёл в начале XVIII в. *Джозеф Луи Лагранж* (1736–1813). Термин «интеграл» впервые употребил в печати Я. Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление».

Независимо от Г. Лейбница и ещё до него эти результаты были получены *Исааком Ньютоном* (1643–1727). Многие задачи из механики и физики ведут, как известно теперь, к понятию первообразной функции и неопределённого интеграла, однако исторически, в частности у И. Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача квадратуры кривой. Ньютону удалось доказать, что площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху – графиком кривой $y = f(x)$, определённой и непрерывной на отрезке $[a,b]$, если её рассматривать на отрезке $[a,x]$, где x – произвольно взятое на $[a,b]$ значение, есть первообразная функция для функции $y = f(x)$: $S(x) = F(x) - F(a)$. Это равенство, пользуясь современными символами, можно записать в виде

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Для определения площади всей криволинейной трапеции следует положить $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть так называемая *формула Ньютона–Лейбница*, содержание которой по существу восходит к И. Барроу. В ней определённый интеграл, рассматриваемый как функция верхнего переменного предела интегрирования x, представлен в виде одной из первообразных $F(x) + C$ ($C = -F(a)$) подынтегральной функции $f(x)$. Эта формула носит также название *основной формулы интегрального исчисления.* Она позволяет сводить довольно сложное вычисление определённых интегралов, т.е. нахождение пределов интегральных сумм, к сравнительно более простой операции отыскания первообразных. Правая часть в этой формуле называется *двойной подстановкой* и записывается в виде $F(x)\Big|_a^b$. Итак, задача вычисления площади фигур, т.е. квадратура, ведёт к понятиям как определённого, так и неопределённого интегралов. Вот почему вычисление интегралов стали иногда называть *квадратурой.* Важнейшую роль в интегрировании Ньютон уделял разложению интегрируемой функции в степенной ряд и затем почленному его интегрированию. Интегрирование в конечном виде также не было оставлено Ньютоном без внимания, хотя играло в его исследованиях второстепенную роль.

В XVIII в. наибольший вклад в развитие и популяризацию дифференциального и интегрального исчислений внёс Л. Эйлер. До него кроме «Анализа бесконечно малых» Лопиталя (1696), содержащего лишь начальные сведения по дифференциальному исчислению, и курса лекций по интегральному исчислению И. Бернулли (1742), составленных, как и книга Лопиталя, в 90-х годах XVII в., по сути, не было никаких учебников или общих руководств по этой новой отрасли науки. Указанные две книги значительно устарели и в первой половине XVIII в. отстали от развития анализа. Остро чувствовалась потребность в новом систематическом курсе. Это обстоятельство и побудило

Эйлера составить полный курс математического анализа. Этот курс состоит из следующих книг.

1) «Введение в анализ бесконечных», 2 тома (1748).

2) «Дифференциальное исчисление», 1 том (1755).

3) «Интегральное исчисление», 3 тома (1768–1769).

Эти книги содержат как результаты работ предшественников и современников Эйлера, так и многие его собственные исследования в области анализа. В своих трудах Эйлер излагает многочисленные приёмы вычисления неопределённых интегралов, применяя и развивая новые методы такие, как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. В отличие от Лейбница у Эйлера, как и у Ньютона, исходным является понятие первообразной, т.е. неопределённого интеграла. «Неопределённым» интеграл называется потому, что определяется с точностью до произвольной постоянной C. Определённый интеграл был для Эйлера лишь частным случаем неопределённого, одной из первообразных. Именно Л. Эйлер предложил использовать знак $\sum$ (греческая буква «сигма») для обозначения интегральных сумм.

Существенный вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также французский учёный и просветитель *Жан Даламбер* (1717–1783) и, особенно, крупный французский математик *Огюстен Луи Коши* (1789–1857).

Развитием математического анализа в XIX в. занимались и русские учёные, например, *М.В. Остроградский* (1801–1862) и *П.Л. Чебышёв* (1821–1894). Академику Михаилу Васильевичу Остроградскому принадлежат такие важнейшие результаты в области интегрального исчисления, как формула, сводящая вычисление тройного (и, вообще, n-кратного) интеграла к вычислению двойного ($(n-1)$-кратного) интеграла, общий приём интеграции рациональных функций, формула преобразования переменных в многомерных интегралах и др. Пафнутий Львович Чебышёв посвятил шесть больших мемуаров интегрированию алгебраических функций. Среди его классических результатов имеется знаменитая теорема об интегрировании биномиальных дифференциалов.

Итак, рассмотрим задачу восстановления функции по её известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления. Процедура нахождения функции по её производной называется *интегрированием*. Интегрирование является процедурой обратной дифференцированию (нахождению производной от заданной функции).