1.2. Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла

Пусть на интервале (a,b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$.

<u>*Опр.1*</u> *(точной первообразной).* Функция $F(x)$ называется точной первообразной по отношению к функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x)=f(x)dx$).

Например, функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел R, поскольку

$$(\sin x)' = \cos x .$$

<u>*Замечание*</u>. Под точной первообразной для функции $f(x)$ *на сегменте* $[a,b]$ будем понимать функцию $F(x)$, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a+0)$, равную $f(a+0)$, и левую производную $F'(b-0)$, равную $f(b-0)$.

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a,b) хотя бы одну первообразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F(x)+C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a,b), то любая другая первообразная $\overline{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F}(x)=F(x)+C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнём, что, в силу дифференцируемости, первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведённом выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция $f(x)$, определённая на (a,b), имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщённой первообразной.

<u>Опр.2</u> *(обобщённой первообразной)*. Функция $F(x)$ называется обобщённой первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если:

1) $F(x)$ непрерывна на (a,b);

2) в любой точке $x \in (a,b)$, за исключением, быть может, множества точек K, функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала (a,b) множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал (a,b) бесконечен, т.е. имеет вид $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$ или $(-\infty,+\infty)$, то множество K может быть счётным, но при этом каждый конечный подинтервал из (a,b) не должен содержать более конечного числа точек K.

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщённой первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчёркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщённой первообразной, то будем называть $F(x)$ просто *первообразной.*

<u>*Пример 1*</u>*. Найти все первообразные для функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$ на интервале $(-1,1)$.*

Решение. Покажем, что точная первообразная для данной функции
$$f(x)=\begin{cases} 1, \textit{если} & x\in(0,1), \\ 0, \textit{если} & x=0, \\ -1, \textit{если} & x\in(-1,0), \end{cases}$$
на указанном интервале не существует и можно найти лишь обобщённую первообразную. Действительно, при $x\in(0,1)$ первообразная $F(x)$ имеет общий вид $x+C_1$, а при $x\in(-1,0)$, соответственно, вид $-x+C_2$, где C_1, C_2 – произвольные действительные константы. Учтём, что в точке $x=0$ первообразная должна быть непрерывной. Записав условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 0-0}(-x+C_2)=$ $=\lim\limits_{x\to 0+0}(x+C_1)=F(0)$, определяем искомое соотношение между константами: $C_2=C_1$. Таким образом, общий вид любой из первообразных: $F(x)=|x|+C_1$, где $C_1\in R$. Любая из этих функций непрерывна на $(-1,1)$ и

$\forall x \in (-1{,}0) \cup (0{,}1)$ её производная совпадает с $\operatorname{sgn} x$. При этом в точке $x = 0$ первообразная не имеет производной.

Пример 2. Найти общий вид первообразной для функции $f(x) = e^{|x|}$ *на всей числовой прямой.*

Решение. При $x > 0$ $f(x) = e^x$ и первообразная имеет вид $F(x) = e^x + C_1$, где $C_1 \in R$. При $x < 0$ $f(x) = e^{-x}$ и, соответственно, её первообразная имеет вид $F(x) = -e^{-x} + C_2$, $C_2 \in R$. Учтём теперь непрерывность первообразной в точке $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0-0}\left(-e^{-x} + C_2\right) = \lim\limits_{x \to 0+0}\left(e^x + C_1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + C_2 = 1 + C_1 \Leftrightarrow C_2 = C_1 + 2$.

Таким образом, общий вид любой из первообразных следующий:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, \textit{если} & x \geq 0 \\ -e^{-x} + C_1 + 2, \textit{если} & x < 0 \end{cases}.$$

Отметим, что, так как

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\left(e^x + C_1\right) - \left(1 + C_1\right)}{x} = 1 \quad \text{и}$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{\left(-e^{-x} + C_1 + 2\right) - \left(1 + C_1\right)}{x} = \lim_{(-x) \to 0+0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1, \quad \text{то} \quad F(x)$$

дифференцируема всюду, включая точку $x = 0$, т.е. мы нашли точную первообразную.

<u>Опр.3</u> (неопределённого интеграла). Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке (a,b) называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a,b), C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Область интегрирования (a,b) обычно можно определить из контекста задачи (чаще всего это промежутки непрерывности $f(x)$). Например, $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.

<u>Пример 3</u>. Найти неопределённый интеграл $\int \max(1; x^2)dx$.

Решение. Рассмотрим случаи: $|x| \le 1$ и $|x| > 1$.

1) Если $-1 \le x \le 1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int dx = x + C$.

2) Если $x > 1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$.

В силу непрерывности первообразной в точке $x = 1$ должно выполняться условие $1 + C = \frac{1}{3} + C_1$, откуда $C_1 = C + \frac{2}{3}$.

3) Если $x < -1$, то имеем $\int \max(1; x^2)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_2$, соответственно для непрерывности первообразной в точке $x = -1$ должно выполняться равенство

$$-1 + C = -\frac{1}{3} + C_2, \text{ откуда } C_2 = C - \frac{2}{3}.$$

Итак, окончательно

$$\int \max(1; x^2)dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C, & \text{где} \quad x < -1; \\ x + C, & \text{где} \quad -1 \le x \le 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C, & \text{где} \quad x > 1, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная.

<u>Пример 4</u>. Найти неопределённый интеграл

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx \quad (0 \le x \le \pi).$$

Решение.

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int |\cos x - \sin x|\,dx =$$

$$=\begin{cases}\int(\cos x-\sin x)dx, & \textit{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\\ \int(\sin x-\cos x)dx, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4}<x\le \pi\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\sin x+\cos x+C, & \textit{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\\ -\sin x-\cos x+C_1, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4}<x\le \pi.\end{cases}$$

В точке $x=\dfrac{\pi}{4}$ запишем условие непрерывности первообразных:

$$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+C=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+C_1,$$

или

$$\sqrt{2}+C=-\sqrt{2}+C_1, \text{ откуда } C_1=C+2\sqrt{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=\begin{cases}\sin x+\cos x+C, & \textit{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\\ -\sin x-\cos x+C+2\sqrt{2}, & \textit{если} \quad \dfrac{\pi}{4}<x\le \pi.\end{cases} \qquad (1)$$

Замечание. Иногда в данной задаче приводят ответ в виде

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}dx=(\sin x+\cos x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

Надо понимать, что это не вполне корректно. Действительно, так выглядит неопределённый интеграл *на каждом* из промежутков $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$. Однако *на всём отрезке* $[0,\pi]$ интеграл равен именно выражению (1).

Вообще, если в условии задачи сказано, что надо вычислить неопределённый интеграл, но не указано, на каком именно промежутке, то это подразумевает, что его требуется вычислить на области интегрируемости подынтегральной функции. И, строго говоря, в ответе следует указывать эту область интегрируемости, например, $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \ (x\ne 0)$.

Такая запись означает, что данная формула справедлива для любого интервала, не содержащего внутри себя значение $x=0$ (в том числе для каждого из бесконечных интервалов $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$). Эта форма ответа в данном случае единственно возможная, так как найти интеграл на объединении этих промежутков нельзя (первообразные терпят разрыв 2 рода в точке $x=0$).

Иногда при вычислении интеграла применяется искусственный приём деления на некоторое выражение, которое, естественно, тогда не должно обращаться в нуль. Допустим, это выражение равно нулю при $x=x_0$. Тогда вычисляют интеграл при $x\neq x_0$, а в конце, если при этом значении x_0 ни подынтегральная функция, ни первообразные не имеют особенностей (определены и непрерывны), доопределяют полученное выражение для первообразных в точке x_0 их предельными значениями.

Пример 5. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция определена, непрерывна и, следовательно, интегрируема при всех действительных x. При $x\neq 0$ имеем:

$$\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}=$$

$$=\int\frac{du}{(u+1)^2}=-\frac{1}{u+1}+C=-\frac{x}{x^2+x+1}+C.$$

В точке $x=0$ подынтегральная функция и её первообразные $-\frac{x}{x^2+x+1}+C$ непрерывны, поэтому полученный для интеграла результат можно считать верным и при $x=0$, если доопределить каждую из первообразных её значением в нуле.

Ответ: $-\frac{x}{x^2+x+1}+C$, $x\in R$.

Пример 6. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. При $x\neq 0$ имеем:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}dx =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C.$$

Подынтегральная функция определена, непрерывна, а, следовательно, и интегрируема, при всех действительных значениях x. Интеграл вычислен сейчас отдельно на каждом из промежутков $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Заметим, что в данном случае можно найти интеграл на всём множестве действительных чисел. Для этого надо дополнительно учесть условие непрерывности первообразных в нуле. Найдём

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}}\right) = \mp \frac{\pi}{2\sqrt{5}}.$$

Поскольку оба односторонних предела в нуле существуют и конечны, то результат интегрирования можно представить в виде

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C + \frac{\pi}{\sqrt{5}}, x > 0; \\ \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C, \quad x < 0; \\ \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C, \quad x = 0. \end{cases}$$

Обратим внимание читателя ещё на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$ (или $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т.е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится совершенно аналогичными рассуждениями). Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой же ситуации при записи ответа (и непосредственно интегрировании) можно также использовать функцию сигнум.

Пример 7. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t=\frac{1}{x}$, тогда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t|=t\cdot\operatorname{sgn} t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}}=-\operatorname{sgn} t\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}}=-\arcsin|t|+C=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$$

1.3. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т.е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегри-