Пример 7. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $t = \frac{1}{x}$, тогда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}$, и, учитывая тождество $|t| = t \cdot \operatorname{sgn} t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} = -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

1.3. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т.е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, важный класс функций, интегралы от которых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Многие иррациональные алгебраические функции, например, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$, также интегрируются в конечном виде. В конечном виде интегрируются и некоторые трансцендентные функции, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Доказано, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ всегда имеет на интервале (a, b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad (a < x < b)$. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Функции, которые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, образуют собой новые трансцендентные функции. Многие из них также хорошо изучены. К ним относятся, например,

интеграл Пуассона $\left(\int e^{-x^2}dx\right)$,

интегралы Френеля $\left(\int \sin(x^2)dx,\ \int \cos(x^2)dx\right)$,

интегральный логарифм $\left(li(x) = \int \frac{dx}{\ln x}\right)$,

интегральные синус $\left(si(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx\right)$

и косинус $\left(ci(x) = \int \frac{\cos x}{x}dx\right)$,

интегральная показательная функция $\left(ei(x) = \int \frac{e^x}{x}dx\right)$.

Не вычисляются в элементарных функциях интегралы $\int \frac{e^x}{x^n}dx$, $\int \frac{\sin x}{x^n}dx$, $\int \frac{\cos x}{x^n}dx \quad (n \in N)$ и многие другие. Так, интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + \delta}\right)dx$, как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции. Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют *специальными функциями*.

Даже если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближённо с некоторой степенью точности. Так, в курсе вычислительных методов изучаются специальные способы приближённого вычисления интегралов с помощью различных разностных схем (методы прямоугольников, трапеций, парабол, сплайн-аппроксимация и пр. подходы).

1.4. Основные свойства неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения (см. доказательство в [2])

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C \quad (C \in R)$ (эти свойства отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).

3. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, где $C \in R \setminus \{0\}$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (свойство аддитивности; подразумевается, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве).

Свойства 3 и 4 отражают свойство линейности неопределённого интеграла, причём эти равенства носят условный характер: они выполняются лишь с точностью до произвольной константы. Следующее свойство 5 показывает, что приведённая ниже таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

6. Одна из первообразных чётной функции есть функция нечётная, а всякая первообразная нечётной функции есть функция чётная.

Рассмотрим далее *табличные* интегралы и наиболее *общие методы* вычисления неопределённых интегралов. К ним традиционно относят следующие: сведение интеграла к простейшим интегралам при помощи тождественных преобразований и использования свойств интегралов, метод замены переменной и интегрирование по частям. Обратим внимание на то, что приписывать константу C в неопределённом интеграле нужно обязательно, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой. Кроме того, надо приучить себя при вычислении неопределённых интегралов всегда указывать область интегрирования (ана-