§ 2.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Практически любой неопределённый интеграл вычисляется путём его упрощения и сведения в конечном итоге к табличному (табличным) интегралу. Специфика используемых при этом математических средств позволяет отнести к *основным методам интегрирования* следующие три способа интеграции:

– использование алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований, а также свойств интегралов;
– замена переменной интегрирования;
– интегрирование по частям.

Заметим, что в любой более-менее сложной задаче обычно в различных комбинациях используются сразу несколько приёмов. В частности, при вычислении интеграла замена переменных (или интегрирование по частям) могут использоваться неоднократно, сопровождаясь упрощающими решение преобразованиями подынтегрального выражения. Остановимся на каждом из перечисленных методов подробнее.

2.1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований

Иногда интеграл удаётся вычислить, не прибегая к замене переменной или интегрированию по частям, а просто с помощью различных алгебраических, тригонометрических и других преобразований подынтегрального выражения и используя свойство линейности интегралов. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов;
– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряжённое выражение;

– выделение полных квадратов (кубов);
– использование формул сокращённого умножения;
– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);
– выделение в числителе дроби производной от знаменателя;
– использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т.п.

Разнообразные примеры использования перечисленных и некоторых других приёмов рассматриваются ниже в тексте пособия. Обращайте на них внимание и старайтесь запоминать, в каких случаях какие приёмы удобно использовать.

Вообще, умение найти для вычисляемого интеграла наиболее краткий и «красивый» способ интегрирования является часто непростой задачей. Это умение вырабатывается постепенно и приходит с опытом.

2.2. Интегрирование путём замены переменной

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций– *метод замены переменной*, или *метод подстановки*. Рассмотрим два возможных случая.

1. *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t=t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))\cdot t'(x)dx = \int g(t)dt. \qquad (1)$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(arctgx),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$