– выделение полных квадратов (кубов);
– использование формул сокращённого умножения;
– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей);
– выделение в числителе дроби производной от знаменателя;
– использование алгебраических тождеств, тригонометрических и гиперболических формул и т.п.

Разнообразные примеры использования перечисленных и некоторых других приёмов рассматриваются ниже в тексте пособия. Обращайте на них внимание и старайтесь запоминать, в каких случаях какие приёмы удобно использовать.

Вообще, умение найти для вычисляемого интеграла наиболее краткий и «красивый» способ интегрирования является часто непростой задачей. Это умение вырабатывается постепенно и приходит с опытом.

2.2. Интегрирование путём замены переменной

Изложим один из сильнейших приёмов для интегрирования функций– *метод замены переменной*, или *метод подстановки*. Рассмотрим два возможных случая.

1. *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t=t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int g(t(x))\cdot t'(x)dx = \int g(t)dt. \qquad (1)$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx = d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx = d(x^2),\ \cos x dx = d(\sin x),\ \sin x dx = -d(\cos x),$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \frac{dx}{x^2+1} = d(arctgx),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx),\ e^{2x}dx = d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left(\sqrt{1+x^2}\right),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x+\frac{1}{x}\right) \text{ и т.п..}$$

Замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ *удобнее для интегрирования* по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)dx = g(t)dt$. Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путём обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Рассмотрим здесь лишь два примера вычисления интегралов этим методом. Множество других примеров вы сможете найти в тексте пособия.

Пример 1. а) $\int \sin^3 x \cos x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; в) $\int e^{5x} dx$.

Решение. а) Так как $d(\sin x) = \cos x dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d \sin x = t^3 dt.$$

Интеграл от последнего выражения вычисляется легко:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Отметим, что в данном примере основным назначением сделанной замены переменной было сведение интеграла от трансцендентной функции тригонометрического вида к интегралу от рациональной алгебраической функции.

Заметим также, что при определённом навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде и не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t. Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

В следующих двух примерах при сведении интегралов к табличным также не будем вводить новые переменные, а сразу запишем результат:

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}} x\right) + C;$$

в) $$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

2. Использование подстановок. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим ещё одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x) dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt. \qquad (2)$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Рассмотрим пример задачи, где при вычислении интеграла возможны сразу несколько различных подстановок. Следовательно, возникает проблема выбора наиболее оптимальной из них. А для того чтобы выбрать более удобную подстановку, надо знать их разновидности и области применения. Итак, сравнивайте и выбирайте.

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. 1-й способ (подстановка $t = \dfrac{1}{x}$*).* ОДЗ: $|x| > 1$. Воспользуемся подстановкой $t = \dfrac{1}{x}$, тогда

$$dx = -\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|},$$

и, учитывая тождество $|t| = t\cdot \operatorname{sgn} t$, в результате получаем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = -\operatorname{sgn} t\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int\frac{d|t|}{\sqrt{1-|t|^2}} =$$

$$= -\arcsin|t| + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

<u>2-й способ</u> (*подстановка* $t = \sqrt{x^2-1}$).

Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2-1}$, тогда $x^2 = t^2+1$, $xdx = tdt$ и

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int\frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C =$$

$$= arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

<u>3-й способ</u> (*тригонометрическая подстановка* $x = \frac{1}{\sin t}$).

Выполним тригонометрическую подстановку $x = \frac{1}{\sin t}$, где

$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{\cos t}{|\sin t|}$

$= \operatorname{sgn}(\sin t)\cdot ctgt$, $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$ и для интеграла имеем:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sgn}(\sin t)\int\frac{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{1}{\sin t}\cdot ctgt} = -\operatorname{sgn}(\sin t)\int dt =$$

$$-\operatorname{sgn}(\sin t)\cdot t + C = -\operatorname{sgn} x\cdot\arcsin\frac{1}{x} + C = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

Заметим, что можно было бы вычислить данный интеграл с помощью аналогичной подстановки через косинус:

$$x = \frac{1}{\cos t}, \text{ где } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

<u>4-й способ</u> (*гиперболическая подстановка* $|x| = cht$).

Теперь вычислим интеграл при помощи гиперболической подстановки $|x| = cht$, $t \geq 0$. Тогда $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{ch^2 t - 1} = \sqrt{sh^2 t} = |sht|$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d|x|}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{d(cht)}{cht \cdot |sht|} = \int \frac{sht}{cht \cdot \operatorname{sgn}(sht) sht} dt =$$

$$= \operatorname{sgn}(sht) \int \frac{dt}{cht} = \operatorname{sgn}(sht) \int \frac{cht \cdot dt}{ch^2 t} = \operatorname{sgn}(sht) \int \frac{d(sht)}{1 + sh^2 t} =$$

$$= \operatorname{sgn}(sht) \int \frac{d(sht)}{1 + sh^2 t} = \operatorname{sgn}(sht) \cdot arctg(sht) + C = arctg|sht| + C =$$

$$= arctg\sqrt{ch^2 t - 1} + C = arctg\sqrt{x^2 - 1} + C.$$

<u>5-й способ</u> (*1-я подстановка Эйлера*).

Положим $t = \sqrt{x^2 - 1} + x$, тогда $x^2 - 1 = (t - x)^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2 + 1}{2t} \Rightarrow$

$dx = \dfrac{t^2 - 1}{2t^2} dt$ и для интеграла получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}}{\frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2-1}{2t}} dt = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C =$$

$$= 2arctg\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + C.$$

Подчеркнём ещё раз, что замена переменной – наиболее мощный и часто используемый метод при вычислении интегралов от иррациональных и трансцендентных функций. Как правило, подобрать подходящую замену в сложных случаях – целое искусство. В некоторых случаях удаётся сформулировать общие рекомендации по заменам, ориентируясь на конкретный класс интегрируемых функций. Например, разработаны и проверены практикой специальные рационализирующие подстановки при интегрировании иррациональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже в соответствующих пунктах.

2.3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или, в краткой форме,

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путём интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^n e^{ax} dx,\ \int x^n \sin axdx,\ \int x^n \cos axdx,\ \int x^n \ln^m xdx$$

$$(n, a \in R, n \neq -1, m \in N),\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx \text{, а также}$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx,\ \int e^{ax} \sin bxdx\ (a, b \in R),\ \int P(x)e^{ax} dx,\ \int P(x)\sin axdx$$

$$\int P(x)\cos axdx,\ \int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x) arctgxdx,\ \int P(x) arcctgxdx,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен относительно x

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ (a_i \in R, a_n \neq 0),$$