циональных алгебраических функций; существуют рекомендации по заменам в классе тригонометрических функций. Многие из таких подстановок будут рассмотрены ниже в соответствующих пунктах.

2.3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или, в краткой форме,

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путём интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций, например, алгебраической и трансцендентной функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^n e^{ax} dx,\ \int x^n \sin axdx,\ \int x^n \cos axdx,\ \int x^n \ln^m xdx$$

$$(n, a \in R, n \neq -1, m \in N),\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx, \text{ а также}$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx,\ \int e^{ax} \sin bxdx\ (a, b \in R),\ \int P(x)e^{ax} dx,\ \int P(x)\sin axdx$$

$$\int P(x)\cos axdx,\ \int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x) arctgxdx,\ \int P(x) arcctgxdx,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен относительно x

$$= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ \ (a_i \in R, a_n \neq 0),$$

которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. При этом в интегралах

$$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; а в интегралах вида

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,$$

$$\int P(x)arctgxdx,\ \int P(x)arcctgxdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу. Иногда на каком-то этапе обнаруживается, что исходный интеграл выражается через некоторые функции и себя самого, тогда его вычисляют, выражая из данного равенства (рассматривая равенство как уравнение относительно искомого интеграла).

Повторное применение правила интегрирования по частям приводит к так называемой *обобщённой формуле интегрирования по частям*. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в рассматриваемом промежутке непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно:

$$u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}.$$

Тогда имеет место формула

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+(-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx.$$

Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из сомножителей в подынтегральной функции служит алгебраический многочлен n-й степени. Тогда производная $u^{(n+1)}$ тождественно равна нулю и для интеграла в левой части получается окончательное выражение.

С помощью интегрирования по частям иногда удаётся вывести рекуррентную формулу понижения для отдельных типов интегралов, содержащих натуральный параметр n, позволяющую свести вычисление данного интеграла к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим значением n. Например, для интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\quad (n \in N)$$

получена формула понижения степени

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Зная интеграл $I_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$, за конечное число шагов приходим к интегралу I_n (см. подробнее п.3.6). Обратимся к примерам.

<u>*Пример 1*</u>. $\int x^3 \ln x dx$.

Решение. Так как дифференцирование $\ln x$ приводит к упрощению, положим $u = \ln x$, $dv = x^3 dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{4}x^4$ и, интегрируя по частям, находим

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C \quad (x > 0).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. $\int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)d(x^2) =$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$. В общей сложности здесь правило интегрирования по частям пришлось применить дважды.

<u>*Пример 3*</u>. $\int e^{ax}\sin bx dx \quad (a \neq 0)$.

Решение. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате получается уравнение относительно неизвестного интеграла. В данном случае положим $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = b\cos bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и имеем: $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$. Ещё раз проинтегрируем по частям образовавшийся справа интеграл, положив в нём $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$. Тогда $du = -b\sin bx dx$, $v = \frac{1}{a}e^{ax}$ и придём к результату:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\right) =$$

$=\frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx-\frac{b}{a}\cos bx\right)-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bxdx$. Обозначим теперь исходный интеграл через I. Тогда имеем уравнение относительно I:

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx-\frac{b}{a}\cos bx\right)-\frac{b^2}{a^2}I,$$

откуда выражаем

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I=\frac{1}{a}e^{ax}\left(\sin bx-\frac{b}{a}\cos bx\right),$$

т.е.
$$I=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx).$$

Окончательно, $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$.

Пример 4. $\int\arcsin xdx$.

Решение. Полагая $u=\arcsin x$, $dv=dx$ $(|x|\le 1)$, определяем $du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v=x$. Следовательно, $\int\arcsin xdx=x\arcsin x-$

$$-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=$$

$$=x\arcsin x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 5. $\int x^2\arccos xdx$.

Решение. Положим $u=\arccos x$, $x^2dx=dv$. Тогда

$$\int x^2\arccos xdx=\int\arccos xd\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u=x^2$, $dv=\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|\le 1)$:

$$\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{3}\int x^2d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}+$$

$$+\frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(x^2\right)=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{9}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$$

Пример 6. $\int\frac{arctgx}{x^3}dx$.

Решение. Положим $u=arctgx$, $\frac{dx}{x^3}=dv$. Тогда $u'=\frac{1}{x^2+1}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$ и $\int\frac{arctgx}{x^3}dx=\int arctgx\,d\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=arctgx\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-$

$$-\int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=-\frac{1}{2x^2}arctgx+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=-\frac{1}{2x^2}arctgx+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-arctgx\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}arctgx\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{1}{2x}+C.$$

Пример 7. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx\ \left(a>0\right)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$, откуда $du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $v=x$. Следовательно, $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}$. Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Пример 8. $\int\sqrt{x^2+k}\,dx\ \left(k\neq 0\right)$.

Решение. Положим $u=\sqrt{x^2+k}$, $dv=dx$. Тогда $I=\int\sqrt{x^2+k}\,dx=$

$$= x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}} = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+k} + k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + I .$$

Откуда находим окончательно, выражая I :

$$\int \sqrt{x^2+k}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C .$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию (логарифмическую, показательную, обратную тригонометрическую, гиперболическую и пр.) сложного аргумента $\varphi(x)$, то часто для упрощения подынтегрального выражения бывает полезно сделать замену, приняв этот аргумент за новую переменную интегрирования.

<u>*Пример 9*</u>. $\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(0<t\le 1)$, тогда $x=\frac{1}{t^2}$ и $dx=-\frac{2dt}{t^3}$.

Получаем интеграл $-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}dt$. Интегрируя по частям, приняв

$u=\arcsin t$, $du=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $dv=t^{-3}dt$, $v=-\frac{1}{2t^2}$, имеем

$$-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}dt = \int \arcsin t d\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{\arcsin t}{t^2} - \int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{\arcsin t}{t^2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \frac{\arcsin t}{t^2} + \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} + C .$$

Таким образом, $\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}dx = x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} + C$.

<u>*Пример 10*</u>. $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Положим $t=-\sqrt[3]{x+1}$, тогда $x=-1-t^3$, $dx=-3t^2dt$ и $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx = -3\int e^t t^2 dt$. Интегрируя по частям, получаем

$$-3\left(e^t t^2 - 2\int te^t dt\right) = -3\left(e^t t^2 - 2te^t + 2e^t\right) + C = -3t^2 e^t + 6te^t -$$

$$-6e^t + C, \text{ где } t = -\sqrt[3]{x+1}.$$

<u>*Пример 11*</u>. $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение. Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$ и интеграл принимает вид $\int e^t \cos t dt$. Проинтегрируем его по частям:

$$I = \int e^t d(\sin t) = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = e^t \sin t + \int e^t d(\cos t) =$$

$= e^t \sin t + (e^t \cos t - \int e^t \cos t dt) = e^t(\sin t + \cos t) - I$. Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C, окончательно находим:

$$I = \frac{1}{2} e^t(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

Можно было вычислить этот интеграл и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x), dv = dx$, тогда

$$I = \int \cos(\ln x)dx = x \cdot \cos(\ln x) - \int \cancel{x} \cdot \left(-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right)dx =$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Ещё раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x \cdot \cos(\ln x) + (x \cdot \sin(\ln x) - \int \cancel{x} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$= x \cdot (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I,$$

откуда находим $I = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$.

<u>*Пример 12*</u>. $\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$. *Решение*. Полагая $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и интегрируя по частям, получим

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \int \frac{\cos xdx}{\sin x} = -xctgx +$$

$$+ \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi n, n \in Z).$$