

§ 3.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Остановимся подробнее на некоторых из наиболее изученных классов интегрируемых функций и существующих методах их интегрирования. В данном параграфе речь пойдёт об интегрировании алгебраических рациональных функций. Вначале рассмотрим некоторые из наиболее часто встречающихся типов интегралов от рациональных функций, и уже затем – общий подход к интегрированию таких дробей.

3.1. Интегралы вида $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx$ ($ac \neq 0$; $cx+d \neq 0$)

Интеграл от дробно-линейной функции легко сводится к сумме двух табличных интегралов выделением в подынтегральной дроби рациональной части:

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \int \frac{dx}{cx+d} = \\ &= \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \int \frac{dx}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример. $\int \frac{2x+1}{3x-2} dx.$

Решение. $\int \frac{2x+1}{3x-2} dx = \int \frac{\frac{2}{3}(3x-2) + \frac{7}{3}}{3x-2} dx = \frac{2}{3} \int dx + \frac{7}{9} \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} =$
 $= \frac{2}{3}x + \frac{7}{9} \ln|3x-2| + C \left(x \neq \frac{2}{3} \right).$