3.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$

Выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене интегралы данного вида приводятся к одному из двух типов табличных интегралов:

$$\int \frac{dt}{t^2+A^2} = \frac{1}{A} arctg \frac{t}{A} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{t^2-A^2} = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{t-A}{t+A}\right| + C.$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{3} arctg \frac{x+2}{3} + C$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^2-6x-16}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-6x-16} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-25} = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right| + C =$

$$= \frac{1}{10} \ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right| + C.$$

3.3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ $(a \neq b)$

Наряду со способом, изложенным выше в п.3.2, для вычисления интегралов данного вида можно воспользоваться следующим очевидным тождеством: $a-b=(x+a)-(x+b)$, тогда имеем

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx =$$

$$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C.$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ $(a \neq 0)$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a} \cdot \int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)} dx =$

$$= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a).$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),$$

следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C\quad(x\neq -2;1).$$

3.4. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ $(a\neq b;\; m,n\in N)$

Интегралы указанного вида берутся, в т.ч., подстановкой $t=\frac{x+a}{x+b}$. Тогда $dt=\frac{b-a}{(x+b)^2}dx$,

$$\frac{1}{x+b}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{x+b}=\frac{1}{b-a}\cdot\left(1-\frac{x+a}{x+b}\right)=\frac{1-t}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m\cdot(x+b)^{n+m-2}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\cdot\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\int\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt. \tag{1}$$

При $m=n=2$ интеграл вычисляется при помощи тождества