Пример 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),$$

следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C\quad(x\neq-2;1).$$

3.4. Интегралы вида $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ $(a\neq b;\ m,n\in N)$

Интегралы указанного вида берутся, в т.ч., подстановкой $t=\dfrac{x+a}{x+b}$. Тогда $dt=\dfrac{b-a}{(x+b)^2}dx$,

$$\frac{1}{x+b}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{x+b}=\frac{1}{b-a}\cdot\left(1-\frac{x+a}{x+b}\right)=\frac{1-t}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^m\cdot(x+b)^{n+m-2}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}dx=$$
$$=\frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\cdot\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{(b-a)^{n+m-1}}\int\frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^m}dt. \qquad (1)$$

При $m=n=2$ интеграл вычисляется при помощи тождества

$$1 \equiv \left(\frac{(x+a)-(x+b)}{a-b} \right)^2 .$$

Имеем $\dfrac{1}{(x+a)^2(x+b)^2} = \left(\dfrac{(x+a)-(x+b)}{(a-b)(x+a)(x+b)} \right)^2 =$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(a-b)} \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a} \right) + \frac{1}{(x+a)^2} \right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(-\frac{1}{x+b} - \frac{2}{a-b} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| - \frac{1}{x+a} \right) +$$

$$+ C = -\frac{a+b+2x}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \ \ (x \neq -a, x \neq -b).$$

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

Решение. Положим $t = \dfrac{x-2}{x+3}$ и, применяя формулу (1), где $a = -2$, $b = 3$, $m = 2$, $n = 3$, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{625} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt = \frac{1}{625} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C, \text{ где } t = \frac{x-2}{x+3} \ \ (x \neq 2, x \neq -3).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int \left(\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) \right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25} \int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25} \int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\ln|x-3|+\frac{2}{125}\ln|x+2|+C \quad (x\neq -2;3).$$

3.5. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \ (a\neq 0)$

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной знаменателя дроби: $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=$

$$=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I,$$

где интеграл $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ вычисляется способом, рассмотренным в п.3.2.

Пример 1. $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Так как $\left(x^2+2x+5\right)'=2(x+1)$, имеем:

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+2}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{x^2+2x+5}+$$

$$+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 2. $\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2-4}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2-4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2-4}=$$