$$=-\frac{1}{25(x-3)}-\frac{1}{25(x+2)}-\frac{2}{125}\ln|x-3|+\frac{2}{125}\ln|x+2|+C \quad (x\neq -2;3).$$

3.5. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \ (a\neq 0)$

Эти интегралы вычисляются выделением в числителе дроби выражения, равного производной знаменателя дроби: $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=$

$$=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot I,$$

где интеграл $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ вычисляется способом, рассмотренным в п.3.2.

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Решение. Так как $\left(x^2+2x+5\right)'=2(x+1)$, имеем:

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x+2}{(x+1)^2+4}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+5\right)}{x^2+2x+5}+$$

$$+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2-4}dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2-4}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x-3\right)}{x^2+2x-3}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}l-\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

3.6. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$ $\left(n\in N, n\geq 2; b^2-4c<0\right)$

Выделением полного квадрата $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$ и заменой $z=x+\frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z=a\cdot tgu$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_n в виде комбинации I_{n-1} и $\int\frac{z^2dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}$, и вычисляя последний из интегралов интегрированием по частям, получим

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+z^2\right)-z^2}{\left(a^2+z^2\right)^n}dz=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int z\frac{zdz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int zd\left(\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)a^2}\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \qquad (1)$$

Зная интеграл $I_1=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$, по этой формуле (1) при $n=2$ получаем