$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x-3\right)}{x^2+2x-3}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}l-\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

3.6. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$ $\left(n\in N, n\geq 2; b^2-4c<0\right)$

Выделением полного квадрата $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$ и заменой $z=x+\frac{b}{2}$ интеграл приводится к виду

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}.$$

Для вычисления последнего интеграла используется подстановка $z=a\cdot tgu$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень n в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_n в виде комбинации I_{n-1} и $\int\frac{z^2dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}$, и вычисляя последний из интегралов интегрированием по частям, получим

$$I_n=\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+z^2\right)-z^2}{\left(a^2+z^2\right)^n}dz=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int z\frac{zdz}{\left(a^2+z^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int zd\left(\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)a^2}\int\frac{dz}{\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}. \qquad (1)$$

Зная интеграл $I_1=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$, по этой формуле (1) при $n=2$ получаем

$$I_2 = \frac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)} + \frac{1}{2a^3} arctg\frac{z}{a} + C. \qquad (2)$$

Полагая $n = 3$ в (1), получаем

$$I_3 = \frac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 = \frac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2} + \frac{3z}{8a^4\left(a^2+z^2\right)} +$$

$$+\frac{3}{8a^5} arctg\frac{z}{a} + C \qquad (3)$$

и т.д.

Таким образом можно вычислить интеграл I_n для любого натурального n.

<u>*Пример 1*</u>. $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(a^2+x^2\right)-x^2}{\left(a^2+x^2\right)^m}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} -$

$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{\left(a^2+x^2\right)^2} = \frac{1}{a^3} arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\int xd\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3} arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \int\frac{dx}{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{a^3} arctg\frac{x}{a} +$$

$$+\frac{1}{2a^2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{2a^3} arctg\frac{x}{a} +$$

$$+\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + C.$$

Можно было просто воспользоваться формулой (2). Наконец, можно было воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = atgt$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$, и поэтому

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 tdt = \frac{1}{a^3}\int \frac{\left(1+\cos 2t\right)}{2}dt =$$

$= \frac{1}{2a^3}\left(t + \sin t \cos t\right) + C$. Осталось сделать обратную подстановку:

$$t = arctg\frac{x}{a},\ \sin t = \sin\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$\cos t = \cos\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Поэтому искомый интеграл равен $\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C$.

<u>Пример 2</u>. $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3) при $a=1$:

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3x}{8\left(1+x^2\right)} + \frac{3}{8}arctgx + C.$$

3.7. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$ $\left(n\in N, n\geq 2; b^2-4c<0\right)$

Для вычисления интегралов вида $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$ (квадратное выражение в знаменателе дроби не имеет действительных корней) представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трёхчлена и некоторой константы, т.е.

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+b)+B-\frac{Ab}{2}}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{d\left(x^2+bx+c\right)}{(x^2+bx+c)^n} + \left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2}\right)*J_n,$$