$$t = arctg\frac{x}{a},\ \sin t = \sin\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$\cos t = \cos\left(arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Поэтому искомый интеграл равен $\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+C$.

<u>*Пример 2*</u>. $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3) при $a=1$:

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2}+\frac{3x}{8\left(1+x^2\right)}+\frac{3}{8}arctgx+C.$$

3.7. Интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$ $\left(n\in N, n\geq 2; b^2-4c<0\right)$

Для вычисления интегралов вида $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx$ (квадратное выражение в знаменателе дроби не имеет действительных корней) представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трёхчлена и некоторой константы, т.е.

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+b)+B-\frac{Ab}{2}}{\left(x^2+bx+c\right)^n}dx =$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(x^2+bx+c\right)}{(x^2+bx+c)^n}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n} =$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(x^2+bx+c\right)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ab}{2}\right)*J_n,$$

где $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$.

Вычисление интеграла J_n рассматривалось выше в п.3.6.

<u>*Пример*</u>. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx -$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2} = -\frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)} - \frac{2x+1}{6\left(\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2\right)} - \frac{1}{4\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.8. Метод алгебраических преобразований

Так как фундаментальный подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже в п.3.9), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных – всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов. Рассмотрим примеры таких преобразований, в которых рациональные выражения интегрируются непосредственным сведением к табличным интегралам, часто путём использования различных искусственных приёмов и иногда введения новых переменных.

<u>*Пример 1*</u>. $\int x(1-2x)^{37}dx$.

Решение. $\int \left(-\frac{1}{2}(1-2x)+\frac{1}{2}\right)(1-2x)^{37}dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{38}dx +$

$$+\frac{1}{2}\int (1-2x)^{37}dx = \frac{1}{4}\int (1-2x)^{38}d(1-2x) -$$