где $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + bx + c\right)^n}$.

Вычисление интеграла J_n рассматривалось выше в п.3.6.

Пример. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} dx$.

Решение. $\int \frac{3x+1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x^2 + x + 1\right)}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} dx -$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)^2} = -\frac{3}{2\left(x^2 + x + 1\right)} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2\left(x^2 + x + 1\right)} - \frac{2x+1}{6\left(\frac{3}{4} + (x + \frac{1}{2})^2\right)} - \frac{1}{4\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.8. Метод алгебраических преобразований

Так как фундаментальный подход, основанный на разложении рациональной дроби на простейшие дроби (который будет изложен ниже в п.3.9), часто требует громоздких выкладок, то при вычислении интегралов от рациональных функций при любой возможности полезно использовать альтернативные подходы в виде различных упрощающих алгебраических преобразований, вспомогательных замен переменных – всего того, что так или иначе упрощает вычисление интегралов. Рассмотрим примеры таких преобразований, в которых рациональные выражения интегрируются непосредственным сведением к табличным интегралам, часто путём использования различных искусственных приёмов и иногда введения новых переменных.

Пример 1. $\int x(1-2x)^{37} dx$.

Решение. $\int \left(-\frac{1}{2}(1-2x) + \frac{1}{2}\right)(1-2x)^{37} dx = -\frac{1}{2} \int (1-2x)^{38} dx +$

$$+\frac{1}{2} \int (1-2x)^{37} dx = \frac{1}{4} \int (1-2x)^{38} d(1-2x) -$$

$$-\frac{1}{4}\int(1-2x)^{37}d(1-2x)=\frac{1}{156}(1-2x)^{39}-\frac{1}{152}(1-2x)^{38}+C.$$

<u>Пример 2</u>. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$.

Решение. Сделаем замену $t=1-5x^2$, откуда $x^2=\frac{1-t}{5}$, $2xdx=$ $=-\frac{1}{5}dt$ и в результате приходим к интегралу:

$$\int\left(\frac{1-t}{5}\right)t\left(-\frac{dt}{10}\right)=\frac{1}{50}\int t^{11}dt-\frac{1}{50}\int t^{10}dt=\frac{t^{12}}{600}-\frac{t^{11}}{550}+C=$$

$$=\frac{\left(1-5x^2\right)^{12}}{600}-\frac{\left(1-5x^2\right)^{11}}{550}+C.$$

<u>Пример 3</u>. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^{100}}$.

Решение. Выполним подстановку $t=x+2$, которая позволяет сделать так, чтобы степень суммы оказалась не в знаменателе, а в числителе дроби, что существенно удобнее для вычисления данного интеграла:

$$\int\frac{(t-2)^2dt}{t^{100}}=\int\left(\frac{t^2-4t+4}{t^{100}}\right)dt=\int\left(t^{-98}-4t^{-99}+4t^{-100}\right)dt=$$

$$=-\frac{t^{-97}}{97}+4\cdot\frac{t^{-98}}{98}-4\cdot\frac{t^{-99}}{99}+C=-\frac{1}{97(x+2)^{97}}+\frac{2}{49(x+2)^{98}}-$$

$$-\frac{4}{99(x+2)^{99}}+C\quad(x\neq-2).$$

<u>Пример 4</u>. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2}=\int\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\right)^2dx=$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-3)^2}+\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+2)^2}-\frac{2}{25}\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)}=$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{25(x-3)} - \frac{1}{25(x+2)} - \frac{2}{125}\ln|x-3| + \frac{2}{125}\ln|x+2| + C \ (x \neq -2;3).$$

<u>*Пример 5*</u>. $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

Решение. Преобразуя знаменатель дроби, получим $x^4+2x^2+5 = (x^2+1)^2+4$. Выполним подстановку $t = x^2+1$, тогда $xdx = \frac{dt}{2}$. Отсюда для интеграла находим

$$\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}arctg\frac{x^2+1}{2} + C.$$

<u>*Пример 6*</u>. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Так как $\frac{1}{x^4-1} = \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$, то

имеем $\int\frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}arctgx + C \ \ (x \neq \pm 1)$.

<u>*Пример 7*</u>. $\int\frac{dx}{x^3(x-1)^6}$.

Решение. $I = \int\frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6}$. Положим $t = \frac{x-1}{x}$, тогда имеем

$$\int\frac{(1-t)^7}{t^6}dt = \int\frac{1-7t+21t^2-35t^3+35t^4-21t^5+7t^6-t^7}{t^6}dt =$$

$$= \int\frac{dt}{t^6} - 7\int\frac{dt}{t^5} + 21\int\frac{dt}{t^4} - 35\int\frac{dt}{t^3} + +35\int\frac{dt}{t^2} - 21\int\frac{dt}{t} + 7\int dt -$$

$$-\int tdt = -\frac{1}{5t^5} + \frac{7}{4t^4} - \frac{7}{t^3} + \frac{35}{2t^2} - \frac{35}{t} - 21\ln|t| + 7t - \frac{t^2}{2} + C,$$

где $t = \frac{x-1}{x}$ $(x \neq 0;1)$.

Пример 8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2}=\int\frac{x^2dx}{x^3\left(1-x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3\left(1-x^3\right)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u(1-u)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-u}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(1-u)^2}+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{1-u}\right|+C=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1-x^3}\right|+C\ \ (x\neq 0;1).$$

Пример 9. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\left(x^2-2\right)}$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\left(x^2-2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^4\left(x^2-2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2(u-2)}=$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{u-2-u}{u^2(u-2)}du=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{u(u-2)}=$$

$$=\frac{1}{4u}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|+C=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2}\right|+C\ \ (x\neq 0;\pm\sqrt{2}).$$

Пример 10. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$. Так как $\displaystyle\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=$

$$=d\left(x-\frac{1}{x}\right)\ \text{и}\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2,$$

то приходим к интегралу $\displaystyle\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$.

<u>*Пример 11*</u>. $\int \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. См. решение примера 5 из п.1.2.

<u>*Пример 12*</u>. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. См. решение примера 6 из п.1.2.

<u>*Пример 13*</u>. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx = \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1}dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1}dx =$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| +$$

$$+ C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| +$$

$$+ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C \quad (x \neq \pm 1).$$

3.9. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит, как отмечалось выше, *Г. Лейбницу* (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т.е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.