Пример 11. $\int \frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Решение. См. решение примера 5 из п.1.2.

Пример 12. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. См. решение примера 6 из п.1.2.

Пример 13. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx = \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1}dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1}dx =$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6-1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| +$$

$$+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| +$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C \quad \left(x \neq \pm 1\right).$$

3.9. Представление рациональной дроби в виде суммы простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов

Идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби принадлежит, как отмечалось выше, *Г. Лейбницу* (1702–1703). Рассмотрим общий подход к интегрированию рациональных дробей, т.е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – целые алгебраические многочлены от x. Этот подход обычно применяют в случае, когда нет более простых приёмов, позволяющих вычислить интеграл.

1. *Интегрирование неправильной дроби.*

Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$ (иными словами, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная), то делением многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ вначале выделяют целую часть – многочлен $S(x)$, т.е. представляют дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Таким образом, интегрирование дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в общем случае сводится к интегрированию многочлена $S(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

2. *Интегрирование правильной дроби.*

Рассмотрим интегрирование правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в которой степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Оно основано на представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей.

1) Первое, что необходимо сделать, – это выписать разложение дроби в сумму элементарных дробей. Вид этого разложения зависит от разложения знаменателя $Q(x)$ на множители. Известно, что алгебраический многочлен любой степени раскладывается на сомножители линейного $(x-a)$ и (или) квадратичного вида x^2+bx+c. Предположим, в разложении $Q(x)$ на множители присутствует сомножитель линейного вида в n-й степени: $(x-a)^n$ (a – действительный корень многочлена кратности n). Тогда ему будет соответствовать сумма ровно n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}, \qquad (1)$$

где A_k, $k=1,2,\ldots,n$, – некоторые постоянные. Если сомножителей линейного типа в разложении многочлена $Q(x)$ несколько, то каждому из них соответствует аналогичная сумма.

Каждому сомножителю квадратичного вида в m-й степени $\left(x^2+bx+c\right)^m$, где трёхчлен x^2+bx+c не имеет действительных корней, соответствуют, в свою очередь, m простейших дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+bx+c\right)^3}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+bx+c\right)^m}, \quad (2)$$

где M_i, N_i, $i=1,2,\ldots,m$, – постоянные.

Таким образом, выписывается представление дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде конечной суммы элементарных дробей вида (1) и (2):

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+bx+c}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+bx+c\right)^2}+\frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+bx+c\right)^3}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+bx+c\right)^m}. \quad (3)$$

2) Далее *методом неопределённых коэффициентов* находятся постоянные $A_k, M_i, N_i, \ldots$ ($k=1,2,\ldots,n$; $i=1,2,\ldots,m$;…). Для этого все простейшие дроби в правой части равенства (3) приводятся к общему знаменателю (этим знаменателем будет многочлен $Q(x)$, как и в левой части). При этом в числителе полученной в результате дроби окажется некоторый многочлен $T(x)$, у которого коэффициенты при различных степенях x зависят от неизвестных $A_k, M_i, N_i, \ldots$. Поскольку две рациональные дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ и $\dfrac{T(x)}{Q(x)}$ с одинаковыми знаменателями тождественно равны (т.е. равны сразу при всех допустимых значениях x) тогда и только тогда, когда равны их числители, то осталось записать условие тождественного равенства многочленов $P(x)$ и $T(x)$. В свою очередь, два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэффициенты, составляют систему алгебраических уравнений, в которой количество неизвестных (неопределённых коэффициентов) совпадает с количеством уравнений системы. Затем эта система решается (достаточно подобрать одно какое-либо решение) и, таким образом, неопределённые ранее коэффициенты оказываются найденными.

3) После этого найденные значения коэффициентов $A_k, M_i, N_i, \ldots$ подставляются в разложение (3), и интегрирование рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ оказывается в результате сведено к интегрированию суммы элементарных дробей (3). Осталось рассмотреть завершение процедуры интегрирования.

Итак, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию дробей вида:

$$\text{А)}\,\frac{A}{x-a};\quad \text{Б)}\,\frac{A}{(x-a)^n}\ (n \geq 2, n \in N);\quad \text{В)}\,\frac{Mx+N}{x^2+bx+c};$$

$$\text{Г)}\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^m}\ (m \geq 2, m \in N).$$

Вычисление интегралов от указанных дробей осуществляется следующим образом:

$$\text{А)}\ \int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C;$$

$$\text{Б)}\ \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C\ (n \geq 2, n \in N);$$

$$\text{В)}\ \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+b) + N - \frac{Mb}{2}}{x^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+bx+c\right)}{x^2+bx+c} + \left(N - \frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{(N - Mb/2)}{\sqrt{c - b^2/4}} \cdot arctg\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-b^2/4}} + C$$

(так как x^2+bx+c не имеет действительных корней, то $c - \dfrac{b^2}{4} > 0$).

Г) Вычисление интегралов вида

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+bx+c\right)^m}dx\ (m \geq 2, m \in N)$$

было рассмотрено в п.3.7.

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Пример 1. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение дроби $\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \tag{5}$$

Приводя дроби в правой части (5) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1). \tag{6}$$

Приведём многочлен в правой части к стандартному виду, упорядочив степени x в порядке убывания:

$$x = (A+B)x^2 + (C-B-4A)x + (4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B-4A=1 \\ 4A-2B+C=0, \end{cases}$$

решая которую находим неопределённые коэффициенты $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{3}$. Наконец, подставим найденные коэффициенты в разложение (5) и проинтегрируем, разбивая интеграл на сумму трёх табличных интегралов:

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + C,\ x \neq -1, x \neq 2.$$

Иногда полезно в равенство, полученное приравниванием многочлена $P(x)$ к числителю $T(x)$ дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простейших дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно это действительные корни знаменателя $Q(x)$ данных дробей). В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут оказаться зависимыми.

Применим данный приём к предыдущему примеру. Для этого, не приводя многочлен в правой части этого тождества (6) к стандартному виду, положим в нём последовательно вначале $x = 2$, и найдём при этом $2 = 3C$, откуда $C = \frac{2}{3}$. Затем положим $x = -1$, получив, что $-1 = 9A$, а значит $A = -\frac{1}{9}$. Наконец, положим в (5) $x = 0$ (не корень многочлена $Q(x)$, но тоже достаточно удобное для подстановки число). В результате имеем $0 = 4A - 2B + C$, откуда с учётом найденных ранее $A = -\frac{1}{9}$ и $C = \frac{2}{3}$ определяем $B = \frac{4A + C}{2} = \frac{1}{9}$. И далее интегрируем по описанной выше схеме.

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - x + 2}{\left(x^2+1\right)^2 (x-1)} dx$.

Решение. Разложение дроби $\dfrac{3x^2 - x + 2}{\left(x^2+1\right)^2 (x-1)}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{3x^2 - x + 2}{\left(x^2+1\right)^2 (x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества

$$3x^2 - x + 2 = A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx + C)(x-1)\left(x^2+1\right) + (Dx + E)(x-1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=0 \\ 2A-C+D+B=3 \\ C-B+E-D=-1 \\ A-C-E=2. \end{cases}$$

Полагая $x=1$, находим $A=1$. Решая систему с учётом $A=1$, определяем остальные коэффициенты: $B=-1, C=-1, D=1, E=0$. Следовательно,

$$\int \frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - arctgx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + C \quad (x \neq 1).$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение. Выделим целую часть неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x\qquad\qquad} & x+3 \\ \_\,3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x^2+6\qquad} & \\ 3x+1. & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}$. Подставляя полученное представление под знак интеграла, вычисляем интеграл:

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{(3x+1)}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Разложим многочлен в знаменателе на множители:

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 =$$

$$=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right),$$

а затем представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Используя метод неопределённых коэффициентов, найдём $A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $D=\dfrac{1}{2}$. Задача оказалась сведена к вычислению интеграла

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\left(x\sqrt{2}+1\right)+arctg\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)+\text{C}.$$

Пример 5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{\left(x^4+1\right)+\left(x^4-1\right)}{2\left(x^6+1\right)}=\frac{\left(x^4+1\right)}{2\left(x^6+1\right)}-\frac{\left(x^4-1\right)}{2\left(x^6+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(x^4-x^2+1\right)+x^2}{2\left(x^6+1\right)}+\frac{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}{2\left(x^6+1\right)}=\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{x^2}{2\left(x^6+1\right)}+$$

$+\dfrac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}$. Интегралы от первых двух слагаемых равны, соответственно, $\dfrac{1}{2}arctgx+C_1$ и $\dfrac{1}{6}arctg\left(x^3\right)+C_2$.

Вычислим интеграл от третьего слагаемого. Для этого, учитывая, что

$$x^4-x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(\sqrt{3}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right),$$

разложим дробь на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим тождество

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}=(Ax+B)\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right),$$

откуда

$$\begin{aligned}
x^3:&\quad 0=A+C,\\
x^2:&\quad -\frac{1}{2}=-\sqrt{3}A+B+\sqrt{3}C+D,\\
x^1:&\quad 0=A-\sqrt{3}B+C+\sqrt{3}D,\\
x^0:&\quad \frac{1}{2}=B+D.
\end{aligned}$$

Решая систему, находим $A=-C=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $B=D=\dfrac{1}{4}$.

Подставляя в разложение, получим

$$\frac{1-x^2}{2\left(x^4-x^2+1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}.$$

Интегрируя, приходим к окончательному ответу:

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{6}arctg\left(x^3\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C.$$