3.10. Метод М. В. Остроградского

Ещё один метод, используемый при интегрировании правильной несократимой рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, носит название *метода Остроградского.* Суть этого метода состоит в выделении рациональной части первообразной.

> ***Остроградский*** *Михаил Васильевич* (1801–1861) – русский математик, член Петербургской АН, один из основателей Петербургской математической школы. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике.

Пусть многочлен $Q(x)$, расположенный в знаменателе интегрируемой дроби, имеет кратные корни, включая и комплексные (чем выше кратность корней, тем эффективнее, вообще говоря, оказывается данный метод в сравнении с методом неопределённых коэффициентов). Разложим этот многочлен $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных сомножителей. Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы каждый корень многочлена $Q(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q_2(x)$, но входил бы в этот многочлен с кратностью 1. Других корней у многочлена $Q_2(x)$, отличных от корней многочлена $Q(x)$, нет. Определим теперь многочлен $Q_1(x)$ так, чтобы $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$. То есть каждый корень многочлена $Q(x)$, если первоначально он имел кратность n $(n\in N)$, войдёт с кратностью, равной 1, в многочлен $Q_2(x)$, и с оставшейся после этого кратностью $(n-1)$ в многочлен $Q_1(x)$. В частности, все простые (кратности 1) корни многочлена $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$. Далее, введём в рассмотрение ещё два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$, записав их в общем виде с неопределёнными коэффициентами, причём их степени на единицу меньше соответственно степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \qquad (1)$$

Чтобы с её помощью вычислить интеграл в левой части, необходимо вначале продифференцировать по x это равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \qquad (2)$$

и затем, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, найти неопределённые коэффициенты методом с аналогичным названием и закончить интегрирование по формуле (1). Обратимся к примерам.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Решение. Под знаком интеграла видим правильную дробь, знаменатель которой $Q(x)=(x-1)^2(x+1)^3$. Находим, что $Q_2(x)=(x-1)(x+1)$ и тогда $Q_1(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_2(x)}=(x-1)(x+1)^2$. Так как степень многочлена $Q_1(x)$ равна 3, то $P_1(x)$ – квадратный трёхчлен, записанный в общем виде: $P_1(x)=ax^2+bx+c$. Аналогично, поскольку степень $Q_2(x)$ равна 2, то $P_2(x)$ – многочлен первой степени $P_2(x)=\delta x+e$. Следовательно, имеем пять неопределённых коэффициентов a, b, c, δ, e. Формула Остроградского примет вид

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}+\int\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Продифференцировав последнее равенство по x, получим

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x+1)^2}\right)'+\frac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)^2-(ax^2+bx+c)\left((x+1)^2+2(x-1)(x+1)\right)}{(x-1)^2(x+1)^4}+$$

$+\dfrac{\delta x+e}{(x-1)(x+1)}$. Сократив первую из дробей в правой части на $(x+1)$ и приведя все дроби к общему знаменателю, получим: $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=$

$$=\frac{(2ax+b)(x-1)(x+1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

Итак, при всех $x \neq \pm 1$ должно выполняться данное тождество. Так как знаменатели дробей слева и справа равны, то должны быть тождественно равны многочлены, находящиеся в числителях:

$$x \equiv (2ax+b)(x^2-1)-(ax^2+bx+c)(3x-1)+(\delta x+e)(x^2-1)(x+1).$$

Найдём коэффициенты a, b, c, δ, e методом неопределённых коэффициентов (сняв временно ограничения $x \neq \pm 1$). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

x^4 : $\quad 0=\delta$

x^3 : $\quad 0=-a+\delta+e$

x^2 : $\quad 0=-2b+a+e-\delta$

x^1 : $\quad 1=-2a-3c+b-e-\delta$

x^0 : $\quad 0=-b+c-e$

Решая систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим

$$a=-\frac{1}{8},\ b=-\frac{1}{8},\ c=-\frac{1}{4},\ \delta=0,\ e=-\frac{1}{8}.$$

Подставим значения коэффициентов в формулу Остроградского:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Осталось вычислить интеграл

$$\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\ln|x+1|+C.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C \quad (x\neq\pm 1).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$. *Решение*. Согласно формуле Остроградского,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}+D\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{Ex+F}{x^2-x+1}dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$1\equiv -Ax^4-2Bx^3-3Cx^2+2Ax+B+D(x^5-x^4+x^3+x^2-x+1)+$$

$$+(Ex+F)(x^4+x^3+x+1),$$

откуда x^5: $\quad 0=D+E$,

x^4: $\quad 0=-A-D+E+F$,

x^3: $\quad 0=-2B+D+F$,

x^2: $\quad 0=-3C+D+E$,

x^1: $\quad 0=2A-D+E+F$,

x^0: $\quad 1=B+D+F$.

Решая систему, находим $A=C=0$, $B=\frac{1}{3}$, $D=-E=\frac{2}{9}$, $F=\frac{4}{9}$. Итак,

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{2}{9}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ \ (x\neq-1).$$

Пример 3. $\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$.

Решение. Поскольку $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$, то разложение, согласно формуле Остроградского, ищем в виде

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\int\frac{Cx+D}{x^2+x+1}dx,$$

откуда, дифференцируя равенство и приводя дроби к общему знаменателю, получаем тождество

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(Ax+B)(2x+1)+(x^2+x+1)(Cx+D).$$

x^3: $\quad 0=C$,

x^2: $\quad 0=-A+D+C$,

x^1: $\quad 0=D-2B+C$,

x^0: $\quad 1=A-B+D$, откуда $A=D=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=0$.

Подставляя в формулу Остроградского, окончательно получаем

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$