§ 4.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Основной подход при интегрировании функций, содержащих переменную под знаком радикала, состоит в подборе *рационализирующих подстановок*, т.е. таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Назовём этот подход методом рационализации подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые из наиболее известных классов интегралов от иррациональных функций.

4.1. Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей

4.1.1. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Здесь под $R(x, y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т.е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m: $R(x, y) = \dfrac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$. При этом многочленом степени n с двумя переменными x и y называется выражение вида

$$P_n(x, y) = a_{n0}x^n + a_{0n}y^n + a_{(n-1)1}x^{n-1}y + a_{1(n-1)}xy^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij}x^i y^j,$$

$i, j = 0,1,2\ldots, n$, где суммарная степень $i + j$ каждого одночлена неотрицательна и не превышает n, причём среди коэффициентов $a_{n0}, a_{(n-1)1}, a_{(n-2)2}, \ldots a_{0n}$ есть хотя бы один, отличный от нуля.

Дробно-линейной иррациональностью назовём функцию вида

$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $n \in N, n > 1$, $a, b, c, d \in R$ – постоянные, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. В случае $c = 0$, $a \neq 0$ получим, в частности, линейную иррациональность $R\left(x,\sqrt[n]{Ax+B}\right)$, где $A = \dfrac{a}{d}$, $B = \dfrac{b}{d}$.

1. Рационализация *линейных иррациональностей* вида $R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)$, где a и b – постоянные ($a \neq 0, n \in N, n > 1$), осуществляется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{ax+b}$. Возводя обе части этого равенства в степень n, получим $t^n = ax + b$, откуда $x = \dfrac{t^n - b}{a}$, $dx = \dfrac{n}{a}t^{n-1}dt$. Переходя в выражении R от переменной x к переменной t, получим рациональное выражение $R\left(\dfrac{t^n - b}{a}, t\right)$.

2. Аналогичным образом рационализируются выражения $R\left(x^m,\sqrt[n]{ax^m+b}\right)$, где $m, n \in N$, $m > 1, n > 1$. При этом используется подстановка $t = \sqrt[n]{ax^m + b}$.

3. Рационализация *дробно-линейных иррациональностей* осуществляется с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$. Тогда $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$,

$dx = \dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеется линейная иррациональность $\sqrt{ax+b} = \sqrt{x+9}$, поэтому положим $t = \sqrt{x+9}$, тогда $x = t^2 - 9$, $dx = 2tdt$ и имеем: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx = 2\cdot\int\frac{t^2dt}{t^2-9} = 2\cdot\int\frac{(t^2-9)+9dt}{t^2-9} =$

$$= 2\int dt + 18 \cdot \int \frac{dt}{t^2-9} = 2t + 3\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = 2\sqrt{x+9} +$$

$$+ 3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C \text{, где } x \geq -9, x \neq 0.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$.

Решение. Под знаком интеграла видим дробно-линейную иррациональность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$; согласно рекомендации применим подстановку $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тогда $x = \frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$, $2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$

$(x \neq \pm 2)$.

4.1.2. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$$

Интегралы указанного вида, где R – рациональная функция своих аргументов, показатели степеней $\frac{p_i}{q_i}$ $(p_i \in Z, q_i \in N)$, $i = 1,2,\ldots,k$, – несократимые дроби, находятся с помощью рационализирующей подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{, где } n = НОК(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Тогда найдутся такие натуральные $l_1, l_2, \ldots, l_k$, что

$\begin{cases} q_1 \cdot l_1 = n \\ q_2 \cdot l_2 = n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ q_k \cdot l_k = n \end{cases}$. Выражаем $x = -\dfrac{t^n d - b}{t^n c - a}$, $dx = \dfrac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2}dt$ и в результате приходим к следующему интегралу от рациональной функции:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}} \right)dx =$$

$$= \int R\left(-\frac{t^n d - b}{t^n c - a}, t^{p_1 l_1}, t^{p_2 l_2}, \dots, t^{p_k l_k} \right)\frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2}dt .$$

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Решение. Интеграл является интегралом рассматриваемого типа, где $a = d = 1$, $b = c = 0$, $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{1}{3}$. Общий знаменатель этих дробей равен 6, поэтому применяем подстановку $t = \sqrt[6]{x}$, в результате освобождаясь от обоих радикалов. С помощью этой рационализирующей подстановки интеграл от иррациональной функции оказывается сведённым к интегралу от рациональной функции. Имеем $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = 6\int\frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 6\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2} = 6\left(\int dt - \int\frac{dt}{1+t^2} \right) = 6\left(t - arctgt\right) + C =$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + C \;(x > 0).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int\frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Решение. Этот интеграл также относится к интегралам указанного вида, причём $a = d = 1$, $b = c = 0$, $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{1}{3}$. Общий знаменатель всех дробей равен 6, поэтому, аналогично предыдущему примеру, применяем подстановку $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$. Следовательно, $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=$

$$=6\cdot\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\cdot\int\frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{1+t^2}dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\tfrac{3}{2}t^4+6arctg(t)+C=\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+6\cdot arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C\ \ (x>0).$$

4.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим основные приёмы вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей, т.е. интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a,b,c – некоторые постоянные, $a\neq 0$. При этом будем дополнительно считать, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет кратного корня, т.е. не представим в виде $a\left(x-x_1\right)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным. Обратимся вначале к некоторым важным частным случаям.

4.2.1. *Интегралы вида* $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt \quad \text{или} \quad \int\sqrt{t^2+A}dt.$$

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx=\int\sqrt{a(x^2+\frac{b}{a}x)+c}\cdot dx=$$

$$=\int\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}\cdot dx.$$

Далее, если $a>0$, то подстановкой $t=x+\frac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду