применяем подстановку $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$. Следовательно, $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=$

$$=6\cdot\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\cdot\int\frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{1+t^2}dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\tfrac{3}{2}t^4+6arctg(t)+C=\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+6\cdot arctg\left(\sqrt[6]{x}\right)+C\ \left(x>0\right).$$

4.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим основные приёмы вычисления интегралов от квадратичных иррациональностей, т.е. интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов, a,b,c – некоторые постоянные, $a\neq 0$. При этом будем дополнительно считать, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c не имеет кратного корня, т.е. не представим в виде $a\left(x-x_1\right)^2$, иначе корень из этого выражения является рациональным. Обратимся вначале к некоторым важным частным случаям.

4.2.1. *Интегралы вида* $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы указанного вида выделением полного квадрата под знаком радикала приводятся к одному из двух типов интегралов

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt \quad \text{или} \quad \int\sqrt{t^2+A}dt.$$

Действительно, выделив полный квадрат, получим

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx=\int\sqrt{a(x^2+\frac{b}{a}x)+c}\cdot dx=$$

$$=\int\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}\cdot dx.$$

Далее, если $a>0$, то подстановкой $t=x+\frac{b}{2a}$ интеграл приводится к виду

$\int\sqrt{t^2+A}dt$ (с точностью до коэффициента); если же $a<0$ и $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$, аналогичной подстановкой получаем интеграл вида $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$. Вычислим эти интегралы.

1. $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$. Положим $u=\sqrt{A^2-t^2}, dv=dt$, откуда $du=-\dfrac{tdt}{\sqrt{A^2-t^2}}, v=t$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{A^2-t^2}}=t\sqrt{A^2-t^2}-$$

$$-\int\frac{A^2-t^2-A^2}{\sqrt{A^2-t^2}}dt=t\sqrt{A^2-t^2}-\int\sqrt{A^2-t^2}dt+A^2\arcsin\frac{t}{A}.$$

Выражая из полученного равенства искомый интеграл, находим окончательно:

$$\int\sqrt{A^2-t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{A^2-t^2}+\frac{A^2}{2}\arcsin\frac{t}{A}+C\quad(|t|\le A).$$

2. $\int\sqrt{t^2+A}dt$. Положим $u=\sqrt{t^2+A}, dv=dt$.

Интегрируя по частям, получаем

$$I=\int\sqrt{t^2+A}dt=t\sqrt{t^2+A}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+A}}=t\sqrt{t^2+A}-$$

$$-\int\frac{t^2+A-A}{\sqrt{t^2+A}}dt=t\sqrt{t^2+A}+A\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+I.$$

Отсюда находим окончательно, выражая I:

$$\int\sqrt{t^2+A}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right|+C\quad(t^2+A\ge 0).$$

Другие способы вычисления интегралов $\int\sqrt{A^2-t^2}dt$ и $\int\sqrt{t^2+A}dt$ рассматриваются в п.4.2.11-п.4.2.13.

Замечание. Если в квадратном трёхчлене ax^2+bx+c выделить полный квадрат $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$ и положить

$t=\sqrt{\left|\dfrac{a}{c-b^2/(4a)}\right|}\cdot\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$, то интеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ приводится к одному из следующих трёх видов:

$$\int R_1\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)dt,\ \int R_2\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)dt,\ \int R_3\left(t,\sqrt{1+t^2}\right)dt.$$

Пример 1. $\int\sqrt{x^2+8x+25}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{x^2+8x+25}dx=\int\sqrt{\left(x^2+8x+16\right)+9}dx=\int\sqrt{(x+4)^2+9}dx=$$

$$=\int\sqrt{(x+4)^2+9}d(x+4)=\frac{x+4}{2}\sqrt{x^2+8x+25}+$$

$$+\frac{9}{2}\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+25}\right|+C.$$

Пример 2. $\int\sqrt{-x^2+2x+8}dx$.

Решение. $\int\sqrt{-x^2+2x+8}dx=\int\sqrt{-\left(x^2-2x\right)+8}dx=$

$$=\int\sqrt{-\left((x-1)^2-1\right)+8}dx=\int\sqrt{9-(x-1)^2}dx=$$

$$=\frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+8}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3}+C\ \ (x\in[-2,4]).$$

4.2.2. Интегралы вида $\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Интегралы данного вида вычисляются выделением в выражении $Ax+B$ производной $2ax+b$ от подкоренного выражения с последующим разбиением в сумму двух табличных интегралов:

$$\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\int\left(\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\right)\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\sqrt{ax^2+bx+c}d\left(ax^2+bx+c\right)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=$$

$=\dfrac{A}{3a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)^3}+\left(B-\dfrac{Ab}{2a}\right)\cdot I$, где интеграл I после выделения под корнем полного квадрата и замены $t = x + \dfrac{b}{2a}$ сводится к одному из следующих интегралов (см. п.4.2.1):

$$\int \sqrt{t^2 + k}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + k} + \frac{k}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + k}\right| + C$$

или

$$\int \sqrt{k^2 - t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{k^2 - t^2} + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{t}{k} + C.$$

<u>Пример</u>. $\int (2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решение. $$\int ((2x+1)+6)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx +$$

$$+6\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \sqrt{x^2+x+1}\,d\left(x^2+x+1\right) +$$

$$+6\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3} +$$

$$+6\left((\frac{x}{2}+\frac{1}{4})\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| \right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3} + 3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} +$$

$$+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

4.2.3. *Интегралы вида* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида путём выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена ax^2+bx+c под знаком радикала приводятся к табличным интегралам

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{A} + C \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C.$$

<u>Пример 1</u>. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем интеграл к виду

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x-2/3)}{\sqrt{1/9-(x-2/3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-2/3}{1/3}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C\quad\left(x\in\left(\frac{1}{3},1\right)\right).$$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат по переменной x, преобразуем квадратный трёхчлен к виду $(x+1)^2+4$. В результате приходим к интегралу

$$\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

4.2.4. ***Интегралы вида*** $\displaystyle\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы указанного вида чаще всего вычисляются выделением в числителе дроби производной от подкоренного выражения:

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\cdot\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-$$

$$-13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1/2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C,$$

где $x \notin \left[-2-\frac{\sqrt{14}}{2}, -2+\frac{\sqrt{14}}{2}\right]$.

Пример 2. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-3/2\cdot(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx =$$
$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$
$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C \quad (x \in (2,4)).$$

4.2.5. *Интегралы вида* $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ – алгебраический многочлен n-й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени с неопределёнными коэффициентами, λ – ещё один неопределённый коэффициент. Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda,$$

из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример. $\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} +$$

$+\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}$, откуда, умножая на $2\sqrt{x^2+x+1}$, получим

$$2(x^3-2) = (4ax+2b)(x^2+x+1) + (ax^2+bx+c)(2x+1) + 2\lambda .$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c и λ имеем систему уравнений $\begin{cases} 2 = 4a+2a \\ 0 = 4a+2b+a+2b \\ 0 = 4a+2b+b+2c \\ -4 = 2b+c+2\lambda \end{cases}$, откуда определяем $a = \dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{5}{12}$, $c = -\dfrac{1}{24}$, $\lambda = -\dfrac{25}{16}$. Следовательно, $\displaystyle\int \frac{(x^3-2)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{25}{16}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + C.$$

4.2.6. *Интегралы вида* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n \in N)$

Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n=1)$ берутся с помощью подстановки $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$. В результате они приводятся к интегралам типа $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ также вычисляются с помощью замены $t=\dfrac{1}{x-\alpha}$. Тогда $x=\dfrac{1}{t}+\alpha$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$,

$ax^2+bx+c=\dfrac{\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)t^2+\left(2a\alpha+b\right)t+a}{t^2}$ и получаем, что

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)t^2+\left(2a\alpha+b\right)t+a}}$$

(т.е. интеграл сводится к интегралу предыдущего типа п.4.2.5).

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение. Положим $t=\dfrac{1}{x}$, тогда $x=\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ и, подставляя в интеграл, получим (при $t>0$, см. замечание в п.4.2.13):

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=$$

$$=-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C\ \ (x>0).$$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Решение. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int\frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=$$

$$=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=3\cdot I_1+I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов I_1 и I_2.

$$I_1 = \ln\left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| + C_1;$$

в интеграле I_2 положим $t = \dfrac{1}{x+1}$ $(t > 0)$:

$$I_2 = \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t} - 1\right) + 3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} =$$

$$= \ln\left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| + C_2.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = 3\ln\left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3} \right| +$$

$$+ \ln\left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x+1} \right| + C \quad (x + 1 > 0).$$

Пример 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$.

Решение. Положим $t = \dfrac{1}{x-1}$, тогда $x = 1 + \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ и в результате перехода к новой переменной приходим при $t > 0$ к интегралу $I = -\displaystyle\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}$. Далее воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = (At + B)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = A\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \frac{(At + B)(10t + 5)}{2\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}.$$

Умножим полученное тождество на $2 \cdot \sqrt{5t^2 + 5t + 1}$:

$$2t^2 = t^2(20A) + t(15A + 10B) + (2A + 5B + 2\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases} 2 = 20A \\ 0 = 15A + 10B \\ 0 = 2A + 5B + 2\lambda, \end{cases}$$

откуда находим $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{20}$, $\lambda = \frac{11}{40}$. Далее,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \int \frac{d(t + 1/2)}{\sqrt{(t + 1/2)^2 - 1/20}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C.$$

Окончательно имеем

$$I = -\left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{10}\right)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln\left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C,$$

где $t = \frac{1}{x-1}$, или $I = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2 + 3x + 1} -$

$$- \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln\left| \frac{(x+1)\sqrt{5} + 2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{x-1} \right| + C \quad (x > 1).$$

4.2.7. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a\right)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ $(n \in Z)$

Интегралы этого типа при $bc \neq 0$ вычисляются подстановкой $t = \left(\sqrt{bx^2 + c}\right)' = \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}}$. Тогда $x^2 = \frac{ct^2}{b\left(b - t^2\right)}$, $xdx = \frac{ctdt}{\left(t^2 - b\right)^2}$ и, умножая и деля подынтегральную дробь на bx^2, получим

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a\right)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}} = \frac{1}{b} \int \frac{1}{x^2\left(x^2 + a\right)^n} \left(\frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}} \right) xdx =$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{1}{\left(\frac{ct^2}{b\left(b - t^2\right)}\right)\left(\frac{ct^2}{b\left(b - t^2\right)} + a\right)^n} \cdot t \cdot \frac{ctdt}{\left(t^2 - b\right)^2}.$$

Пример. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \left(\sqrt{x^2+2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, тогда $x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2+1 = \frac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx = \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}$. Для удобства преобразований умножим и разделим подынтегральное выражение на x^2:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{x^2+2} \cdot x^2 \cdot (x^2+1)} = \int \frac{t \cdot \frac{2tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t^2}{1-t^2} \cdot \frac{t^2+1}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

4.2.8. Интегралы вида $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}}$ $(n \in Z)$

Интегралы данного вида при $bc \neq 0$ рационализируются подстановкой $t = \sqrt{bx^2+c}$. Тогда $x^2 = \frac{t^2-c}{b}$, $xdx = \frac{tdt}{b}$ и интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}} = \frac{1}{b}\int \frac{tdt}{\left(\frac{t^2-c}{b}+a\right)^n \cdot t}.$$

Пример. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Положим $t = \sqrt{x^2+2}$, тогда $x^2 = t^2 - 2$, $xdx = tdt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C.$$

4.2.9. *Интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in N)$

Здесь считается, что $p^2-4q<0$, т.е квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Предположим вначале, что $ax^2+bx+c=a\left(x^2+px+q\right)$. Тогда

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\left(A_1x+B_1\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Поскольку $A_1x+B_1=\dfrac{A_1}{2}(2x+p)+B_1-\dfrac{A_1p}{2}$, то

$$\int\frac{\left(A_1x+B_1\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^{n+\frac{1}{2}}}=C_1\cdot\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^{n+\frac{1}{2}}}+D_1\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Первый из полученных интегралов табличный. Для вычисления интеграла

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

применяется подстановка Абеля: $t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

В общем случае, когда отношение трёхчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно, в интеграле

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

делают замену переменной интегрирования так, чтобы во вновь полученных трёхчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$, если $p\neq\dfrac{b}{a}$, и $x=t-\dfrac{p}{2}$, если $p=\dfrac{b}{a}$.

В результате получаем интеграл

$$\int\frac{Mt+N}{\left(t^2+\lambda\right)^n\sqrt{\delta t^2+r}}dt\,, \qquad (2)$$

для вычисления которого представим его в виде суммы

$$\int \frac{Mtdt}{\left(t^2+\lambda\right)^n \sqrt{\delta t^2+r}} + N \cdot \int \frac{dt}{\left(t^2+\lambda\right)^n \sqrt{\delta t^2+r}}.$$

К первому из этих интегралов применяем подстановку $u=\sqrt{\delta t^2+r}$, а ко второму – подстановку $v=\left(\sqrt{\delta t_2+r}\right)'$ (см. п.4.2.7–п.4.2.8).

<u>*Пример 1*</u>. $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение. <u>*1-й способ*</u>. Выделяя полный квадрат, перепишем интеграл в виде $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} =$

$= \int \frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{8}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}$. Положим $t=\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$, тогда $\sqrt{5}dt=2dx$ и, значит, приходим к интегралу $\frac{4}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}}$. Положим теперь $t=\frac{1}{\sin u}$, откуда $\frac{1}{t}=\sin u$, $-\frac{dt}{t^2}=\cos u du$. Поэтому

$$\frac{4}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{5}\right)\sqrt{t^2-1}} = -\frac{4}{5}\int \frac{\cos u \sin u du}{\left(1+\frac{3}{5}\sin^2 u\right)\cos u} = -\frac{4}{5}\int \frac{\sin u du}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cos^2 u} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{d(\cos u)}{\frac{8}{3}-\cos^2 u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\cos u}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\cos u}\right| + C, \text{ где } u=\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2x+1}.$$

Окончательно получим при $x \notin \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3\left(x^2+x-1\right)}}\right| + C.$$

<u>2-й способ</u>. Вычислим этот же интеграл без применения тригонометрических подстановок. Полагая $y = x + \frac{1}{2}$, сразу приходим к интегралу (см. п.4.2.7) $\int \frac{dy}{\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}}$, который рационализируется подстановкой

$$t = \left(\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}\right)' = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}} \text{ откуда } \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}} = \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Подставляя в интеграл, имеем

$$\int \frac{dt}{\frac{3}{4} - 2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3} + \sqrt{8}t}{\sqrt{3} - \sqrt{8}t}\right| + C, \text{ где } t = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}},$$

и окончательно получаем при $x \notin \left[-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + x + 1\right)\sqrt{x^2 + x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3\left(x^2 + x - 1\right)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3\left(x^2 + x - 1\right)}}\right| + C.$$

<u>Пример 2</u>. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + x + 2\right)^5}}$.

Решение. Это интеграл вида (1), воспользуемся для его вычисления подстановкой Абеля, положив $t = \left(\sqrt{x^2 + x + 2}\right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}$. Тогда

$$4t^2\left(x^2 + x + 2\right) = 4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x^2 + x + 2\right) - 7,$$

откуда $x^2 + x + 2 = \frac{-7}{4t^2 - 4}$. Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2 + x + 2} =$ $= x + \frac{1}{2}$ с использованием в его левой части правила $d(uv) = vdu + udv$, имеем $d\left(t\sqrt{x^2 + x + 2}\right) = d\left(x + \frac{1}{2}\right)$,

$$\sqrt{x^2+x+2}\cdot dt + t\cdot\frac{(2x+1)dx}{2\sqrt{x^2+x+2}} = dx,$$

$$\sqrt{x^2+x+2}\cdot dt + t^2 dx = dx,$$

откуда получаем требуемое соотношение, связывающее дифференциалы «старой» и «новой» переменных интегрирования:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{dt}{1-t^2}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}(x^2+x+2)^2} =$$

$$= \int\frac{(4t^2-4)^2}{49}\cdot\frac{dt}{1-t^2} = \frac{16}{49}\int(1-t^2)dt = \frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= \frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} - \frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)+C.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\displaystyle\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Это интеграл вида (2). Разобьём его на два интеграла

$$\int\frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} + \int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = I_1 + I_2.$$

Положив в первом из интегралов $u = x^2$, а затем $z = \sqrt{u+2}$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}} = \int\frac{dz}{(z^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C.$$

Для вычисления второго интеграла положим $t = \left(\sqrt{x^2+2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ Тогда $x^2 = \dfrac{2t^2}{1-t^2}$, $x^2+1 = \dfrac{t^2+1}{1-t^2}$, $xdx = \dfrac{2tdt}{(1-t^2)^2}$ и, подставляя в интеграл, получим

$$I_2 = \int \frac{2dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{2x(xdx)}{x^2\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{2t \cdot \dfrac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}}{\dfrac{2t^2}{1-t^2} \cdot \dfrac{t^2+1}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Окончательно,

$$\int \frac{(x+2)dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + 2arctg\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

<u>*Замечание*</u>. Интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+2}}$ на промежутке $x>0$ $(x<0)$ заменой $u = \frac{1}{x^2}$ приводится к виду $\int \frac{-du}{(u+1)\sqrt{1+2u}}$.

<u>*Пример 4*</u>. $\int \frac{11x-13}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Так как отношение трёхчленов x^2-x+1 и x^2+1 не является константой, то приведём этот интеграл к виду (2) дробно-линейной подстановкой $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Найдём коэффициенты α и β. Имеем

$$x^2-x+1 = \frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{(t+1)^2}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем соотношением между α и β:

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0.$$

Поскольку

$$x^2+1 = \frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2},$$

то, приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем ещё одно соотношением между α и β:

$$2\alpha\beta+2=0.$$

Решая систему $\begin{cases} 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0 \\ 2\alpha\beta + 2 = 0 \end{cases}$, находим $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$. Следовательно, в данном интеграле надо делать замену $x = \dfrac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем

$$x^2 - x + 1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2}, \qquad x^2 + 1 = \frac{2t^2+2}{(t+1)^2}, \qquad 11x - 13 = -\frac{2t+24}{t+1},$$

$dx = \dfrac{2dt}{(t+1)^2}$, и, подставляя в интеграл, получаем его в виде (2)

$$\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx = -2\sqrt{2}\int \frac{(t+12)dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}.$$

Далее, имеем

$$\int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{d\left(\sqrt{t^2+1}\right)}{t^2+3} = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} + C.$$

Для вычисления интеграла $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$ сделаем подстановку $z = \left(\sqrt{t^2+1}\right)'$. Имеем $\dfrac{dz}{1-z^2} = \dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$,

$$t^2 + 3 = \frac{3-2z^2}{1-z^2} \text{ и тогда } \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \int \frac{dz}{3-2z^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + C.$$

Окончательно,

$$\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx = -2arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} -$$

$$-4\sqrt{3}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + C, \text{ где } t = \frac{x+1}{1-x}.$$

4.2.10. *Интегралы вида* $\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Здесь $R(x)=\dfrac{T_k(x)}{Q_m(x)}$ – рациональная функция, $T_k(x)$ и $Q_m(x)$ – целые алгебраические многочлены соответственно степеней k и m. Выделяя при $k \geq m$ из рациональной дроби $R(x)$ целую часть – многочлен $S(x)$:

$$R(x)=S_{k-m}(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ n<m,$$

и раскладывая полученную правильную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в сумму простейших дробей, получаем, что интегрирование функций $\dfrac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению рассмотренных выше интегралов трёх типов:

А) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

Б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

С) $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

где квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$. *Решение*. См. пример 3 из п.4.2.9.

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Выделяя из дроби $\dfrac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}$ целую часть, имеем

$$\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}=x+1+\frac{3x-8}{x^3+1}.$$

Разложим дробь $\frac{3x-8}{x^3+1}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{3x-8}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда $3x-8=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)$. Полагая в этом равенстве $x=-1$, находим $A=-\frac{11}{3}$. Приравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены, получаем ещё два равенства $A+B=0$ и $A+C=-8$, откуда определяем $B=\frac{11}{3}$, $C=-\frac{13}{3}$. Следовательно,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{(11x-13)dx}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

Здесь $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$.

Для второго интеграла при $x+1>0$ положим $t=\frac{1}{x+1}$:

$$-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{11}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|+C.$$

Третий интеграл был вычислен выше в примере 4 п.4.2.9.

Таким образом, $\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{\left(x^3+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+$

$$+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|-$$

$$-\frac{2}{3}arctg\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6\left(x^2+1\right)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{6\left(x^2+1\right)}-\sqrt{2}(x+1)}\right|+C.$$

4.2.11. *Интегралы вида*

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\,,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx\,,\ \int R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$$

Рассмотрим вычисление этих интегралов с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок.

1. Рационализацию подынтегрального выражения $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$, $a>0$, можно проводить с помощью *тригонометрической подстановки* $x=a\sin t$, где $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. При этом если t «пробегает» отрезок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, то переменная x, соответственно, «пробегает» отрезок $[-a,a]$, что отвечает ОДЗ интеграла. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot|\cos t|=a\cdot\cos t$, так как на промежутке $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает неотрицательные значения. При этом алгебраическое иррациональное выражение $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ преобразуется к виду тригонометрического рационального выражения $R(a\sin t,a\cos t)$. В случае $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ имеем, с учётом ОДЗ, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, а в случае $R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$, соответственно, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Также в этом случае можно было сделать подстановку $x=a\cos t$, где $t\in[0,\pi]$, и тогда вместо иррациональной функции $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ получили бы рациональную тригонометрическую функцию $R(a\cos t,a\sin t)$.

<u>*Пример 1*</u>. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ \ (a>0)$.

Решение. Сделаем тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$. Поскольку по ОДЗ $x\in[-a,a]$, то положим $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2-x^2}=a|\cos t|=a\cos t$, $dx=a\cos t\,dt$ и получаем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int\cos^2 t dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t d(2t)\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C \quad (|x|\le a).$$

Замечание. Можно было воспользоваться подстановкой $x = a\cos t$, $t\in[0,\pi]$.

Пример 2. $\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx \quad (a>0)$.

Решение. 1-й способ. Положим $x = a\sin t$, где $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = a\cos t dt$ и приходим к интегралу

$$a\int\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\cos t dt = a\int\frac{\sqrt{1+\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{1-\sin t}\cdot\sqrt{1+\sin t}}\cos t dt =$$

$$=a\int\frac{(1+\sin t)\cos t}{|\cos t|}dt = a\int(1+\sin t)dt = a(t-\cos t)+C=$$

$$=a\left(\arcsin\frac{x}{a}-\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right)+C = a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-$$

$$-a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C = a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C \quad (-a\le x<a).$$

2-й способ. Для сравнения решим задачу с помощью подстановки $x = a\cos 2t$, где $2t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тогда $dx = -2a\sin 2t dt$,

$$2t = \arccos\frac{x}{a},\ \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 t}{2\sin^2 t}}=\frac{\cos t}{|\sin t|}=$$

$= \operatorname{sgn}(\sin t)\dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{sgn} t\,\dfrac{\cos t}{\sin t}$, и, следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = -4a\operatorname{sgn} t\int\cos^2 t dt = -4a\operatorname{sgn} t\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C =$$

$$-a|2t| - a\sin|2t| + C = -a\left|\arccos\frac{x}{a}\right| - a\sin\left|\arccos\frac{x}{a}\right| + C =$$

$$= -a\cdot\arccos\frac{x}{a} - a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = -a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}\right) -$$

$$-\sqrt{a^2-x^2} + C = a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C - \frac{\pi}{2}a.$$

4.2.12. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

1. Для рационализации выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ применяют тригонометрическую подстановку $x = a\cdot tgt$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. При этом когда переменная t «пробегает» указанный интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ в направлении от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то переменная x один раз «пробегает» всё множество действительных чисел от $-\infty$ до $+\infty$ (взаимно однозначная замена переменной). В этом случае для корня $\sqrt{a^2+x^2}$ получаем:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\cdot tg^2 t} = a\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t},$$

так как на рассматриваемом интервале косинус положителен, $dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t}$. В результате иррациональная функция $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ преобразуется к тригонометрическому виду $R\left(atgt, \dfrac{a}{\cos t}\right)$, не содержащему радикалов.

Пример 1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$.

Решение. Положим $x = a\cdot tgt$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приходим к интегралу $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{tg\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} =$

$$= \frac{1}{a}\int\frac{dtg\frac{t}{2}}{tg\frac{t}{2}} = \frac{1}{a}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C, \text{ где } t = arctg\frac{x}{a} \ (x \neq 0).$$

2. В данной ситуации можно было также использовать подстановку $x = a\cdot ctgt$, где $t \in (0,\pi)$. Тогда

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\cdot ctg^2 t} = a\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} = \frac{a}{|\sin t|} = \frac{a}{\sin t},$$

так как на рассматриваемом интервале синус положителен, $dx = -\frac{adt}{\sin^2 t}$. В результате иррациональная функция $R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$ преобразуется к тригонометрическому виду

$$R\left(a\cdot ctgt, \frac{a}{\sin t}\right).$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.

Решение. Положим $x = a\cdot ctgt$, $t \in (0,\pi)$. Тогда имеем при $x \neq 0$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{-adt}{\sin^2 t\cdot a\cdot ctgt\cdot\frac{a}{\sin t}} = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\sin t - 1}{\sin t + 1}\right| + C, \text{ где } t = arcctg\frac{x}{a}.$$

3. Выражения $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ рационализируются также с помощью гиперболической подстановки $x = a \cdot sht$, $t \in R$. Тогда $\sqrt{a^2 + x^2} =$
$= \sqrt{a^2 + a^2 \cdot sh^2 t} = |a| \cdot \sqrt{ch^2 t} = a \cdot |cht| = a \cdot cht$ ($cht > 0 \ \forall t \in R$).

<u>Пример 3</u>. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \ (a > 0)$.

Решение. Выполним гиперболическую подстановку $x = asht$, $dx = achtdt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + sh^2 t\right)} = acht$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл

$$a^2 \int ch^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + ch2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\int t dt + \frac{1}{2} \int ch2t d(2t) \right) =$$

$= \dfrac{a^2}{2} t + \dfrac{a^2}{4} sh2t + C$. Осталось сделать обратную подстановку. Из равенства $sht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{x}{a}$ находим, что $e^t = \dfrac{x \pm \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$. Так как $e^t > 0$, то $t = \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| - \ln a$. Очевидно, $sh2t = 2sht \cdot cht =$
$= 2sht\sqrt{1 + sh^2 t} = 2 \cdot \dfrac{x}{a} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 + x^2}$, поэтому окончательно получаем (число $-\frac{a^2}{2} \ln a$ вошло в C)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln\left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

4.2.13. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}} \right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\dfrac{x + a}{x - a}} \right) dx \ (a > 0)$.

Для рационализации выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$, $R\left(x, \sqrt{\dfrac{x - a}{x + a}} \right)$, $R\left(x, \sqrt{\dfrac{x + a}{x - a}} \right)$ применяют как тригонометрические, так и гиперболические подстановки.

Рассмотрим случай $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$. Подкоренное выражение определено при $|x|\ge a$. Возможны подстановки:

1. $x=\dfrac{a}{\sin t}$, где $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, при этом радикал преобразуется следующим образом: $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=$

$=a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\cos t}{\sin t}\right)^2}=a\cdot|ctgt|$, и подынтегральная функция оказывается рационально зависящей от тригонометрических функций $R\left(\dfrac{a}{\sin t},a|ctgt|\right)$.

2. Аналогичная подстановка через косинус $x=\dfrac{a}{\cos t}$, где $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, приводит к следующим преобразованиям:

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}=a\cdot|tgt|.$$

И опять подынтегральная функция принимает рациональный (относительно тригонометрических функций) вид $R\left(\dfrac{a}{\cos t},a|tgt|\right)$.

3. $x=a\cdot cht$, $t\ge 0$ (если $x>0$) или подстановка $x=-a\cdot cht$, $t\ge 0$ (если $x<0$). Тогда

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\cdot ch^2t-a^2}=a\cdot\sqrt{sh^2t}=a\cdot|sht|,$$

и выражение $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ приводится к виду $R(a\cdot cht,a|sht|)$.

При наличии радикала $\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$ в подынтегральном выражении (ОДЗ: $x\in(-\infty,-a)\cup[a,+\infty)$) можно воспользоваться подстановкой

$$x=\frac{a}{\cos t},\text{ где } t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right],\text{ и тогда } \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos t} - 1}{\frac{1}{\cos t} + 1}} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{2\cos^2 \frac{t}{2}}} = \left| tg \frac{t}{2} \right|.$$

С другой стороны, в этом случае возможна подстановка $x = a \cdot cht$:

$$\sqrt{\frac{x - a}{x + a}} = \sqrt{\frac{cht - 1}{cht + 1}} = \sqrt{\frac{2sh^2 \frac{t}{2}}{2ch^2 \frac{t}{2}}} = \left| th \frac{t}{2} \right|.$$

Замечание. Ещё раз обратим внимание читателя на одно обстоятельство. Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 - a^2}$ (или $\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$), то в этом случае первообразная ищется на луче $x > a$ или на луче $x < -a$. Так как обычно нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то часто выбирают тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т.е. луч $x > a$ (на другом луче $x < -a$ первообразная находится аналогичными рассуждениями). Поэтому, учитывая это, в указанных выше подстановках можно ограничиться уменьшенными вполовину промежутками по t:

$$x = \frac{a}{\sin t} \text{ при } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \; x = \frac{a}{\cos t} \text{ при } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x = a \cdot cht \text{ при } t \in [0, +\infty).$$

Это позволяет при упрощении радикалов однозначно раскрывать модули. В этой ситуации можно использовать функцию сигнум.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} \quad (x > a).$

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $dx = \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{atgtdt}{\cos t}$, $\sqrt{(x^2 - a^2)^3} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2\right)^3} = a^3 \sqrt{tg^6 t} = a^3 tg^3 t.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{tg^2 t\cos t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} =$$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2 \sin t} + C$. Осталось сделать обратную подстановку.

Так как $x = \frac{a}{\cos t}$, то $\cos t = \frac{a}{x}$,

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$.

<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (x > a)$.

Решение. Применим гиперболическую подстановку: $x = acht$, $t \geq 0$. Тогда $dx = ashtdt$, $\sqrt{x^2-a^2} = a|sht| = asht$ и интеграл сводится к интегралу $\int dt = t + C$. Сделаем обратную подстановку: $x = acht \Leftrightarrow cht = \frac{x}{a}$ $\Leftrightarrow t = Arch\frac{x}{a}$, где обратная функция к указанной ветви гиперболического косинуса имеет вид

$$Archx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1.$$

Итак, $\int dt = t + C = Arch\frac{x}{a} + C = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right) + C =$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C',$$

где в постоянную C' здесь включено слагаемое $(-\ln a)$.

<u>*Пример 3*</u>. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx \quad (x \geq a)$.

Решение. В некоторых случаях при вычислении интегралов рассматриваемого вида наряду с указанными подстановками можно применять и другие. Например, в данном случае положим $x - a = 2ash^2 t$, тогда

$$x+a=2a(sh^2t+1)=2ach^2t \text{ и } \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{2ash^2x}{2ach^2x}}=\frac{shx}{chx},$$

$dx=4asht\cdot cht\cdot dt$ и приходим к интегралу

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=4a\int sh^2tdt=4a\int\frac{ch2t-1}{2}dt=ash2t-2at+C.$$

Учитывая, что $sht=\sqrt{\frac{x-a}{2a}}$, $cht=\sqrt{\frac{x+a}{2a}}$, имеем $a\cdot sh2t=$ $=2a\cdot sht\cdot cht=\sqrt{x^2-a^2}$. Далее, $sht+cht=e^t$, отсюда

$$t=\ln(sht+cht)=\ln\left(\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}\right)=$$

$=\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)-\ln\sqrt{2a}$. Окончательно получим

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)+C',$$

где $C'=C-\ln\sqrt{2a}$.

4.2.14. *1-я подстановка Эйлера* $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера. *1-я подстановка Эйлера* применима в случае, когда $a>0$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$$

(можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}$). Возведём это равенство в квадрат:

$$ax^2+bx+c=\left(t-x\sqrt{a}\right)^2,$$

$$\cancel{ax^2}+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+\cancel{ax^2},$$

откуда выражаем x через t: $x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$.

Тогда $dx=2\cdot\frac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\cdot t+b\right)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=$

$= t-\sqrt{a}\cdot\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t+b}$. Переходя к новой переменной интегрирования, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt .$$

Вычислив интеграл, необходимо сделать обратную подстановку

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a} .$$

<u>*Пример 1*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Решение. Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, то применим 1-ю подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2+a}=t-x .$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$x^2+a=t^2-2tx+x^2 \text{, или } x=\frac{t^2-a}{2t}.$$

Дифференцируя данное равенство, находим $dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$,

$\sqrt{x^2+a}=\dfrac{t^2+a}{2t}$. Подставляя в подынтегральное выражение, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C .$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, здесь также возможно применение 1-й подстановки Эйлера:

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x .$$

Теперь возведём это равенство в квадрат:

$$x^2-x+1=(t-x)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-x+1=t^2-2tx+\cancel{x^2} \Leftrightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1}.$$

Дифференцируя, находим $dx = \left(\dfrac{t^2-1}{2t-1}\right)' dt = 2\cdot\dfrac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. Переходя к новой переменной, получаем интеграл $2\cdot\displaystyle\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt$. Далее представляем подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей и вычисляем:

$$2\cdot\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}dt = \int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt = 2\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{d(2t-1)}{(2t-1)^2} = 2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\frac{3}{2(2t-1)}+C,$$

где $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$.

4.2.15. *2-я подстановка Эйлера* $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$

2-я подстановка Эйлера применима при вычислении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, если свободный член $c>0$.

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$ (можно также было положить $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c}$). Возведём данное равенство в квадрат:

$$ax^2+bx+\cancel{c} = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+\cancel{c}.$$

После сокращения на $x\neq 0$ имеем для x: $x = \dfrac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}$.

Тогда $dx = 2\cdot\dfrac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c} =$

$$= \frac{2\sqrt{c}\cdot t-b}{a-t^2}\cdot t+\sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\cdot t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

В результате замены переменной приходим к интегралу от рациональной дроби

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt .$$

Вычислив интеграл, в конце подставим

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

<u>*Пример*</u>. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение. Рассмотрим интеграл из предыдущего примера, но теперь вычислим его при помощи 2-й подстановки Эйлера (т.к. свободный член квадратного трёхчлена $c = 1 > 0$, это возможно). Положим

$$\sqrt{x^2-x+1} = xt-1,$$

возведём в квадрат:

$$x^2 - x + \cancel{1} = x^2t^2 - 2xt + \cancel{1}.$$

После сокращения на x, выражаем из оставшегося равенства x через t: $x = \frac{2t-1}{t^2-1}$. Тогда $dx = -2\cdot\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}dt$ и $\sqrt{x^2-x+1} = xt-1 =$ $= \frac{t^2-t+1}{t^2-1}$, $x+\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t}{t-1}$. Подставляя в интеграл, получим

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt =$$

$$= \int\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{3}{2(t+1)} - \frac{3}{(t+1)^2}\right)dt =$$

$$= 2\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1} - 3\int\frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C, \text{ где } t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}.$$

4.2.16. *3-я подстановка Эйлера* $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$

3-я подстановка Эйлера применяется при вычислении интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в случае, когда квадратный трёхчлен

ax^2+bx+c имеет различные вещественные корни λ и μ, т.е.

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$. Возведём равенство в квадрат:

$$a(x-\lambda)(x-\mu)=t^2(x-\lambda)^2.$$

Сократим на $x-\lambda\neq 0$ и, выражая x через t, получим $x=\dfrac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a}$.

Дифференцируя, находим $dx=\dfrac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=$ $=t(x-\lambda)=\dfrac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}$. Подставляя в исходный интеграл, получаем интеграл от рациональной дроби

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}\right)\cdot\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Вычислив интеграл, в конце выполним подстановку $t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся 3-й подстановкой Эйлера: $\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$. Возведём равенство в квадрат: $(a+x)(a-x)=t(a-x)$, откуда найдём $x=a\cdot\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. Тогда получаем следующее соотношение между дифференциалами: $dx=\dfrac{4atdt}{(t^2+1)^2}$. Кроме того, $\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{t^2+1}$. Переходя к новой переменной под знаком интеграла, получаем при $|x|<a$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решение. Поскольку квадратный трёхчлен под знаком радикала имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, то применим 3-ю подстановку Эйлера:

$$\sqrt{1-2x-x^2} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right).$$

Переписав данное равенство в виде

$$\sqrt{-\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right),$$

возведём его в квадрат и сократим на $\left(x+1+\sqrt{2}\right)$. Выражая затем x через t, получим $x = \frac{-t^2\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}-1}{t^2+1}$, $\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}$, $1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1}$, $dx = -\frac{4\sqrt{2}tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$. Таким образом, сводим исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -4\sqrt{2}\int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)},$$

который вычисляем стандартным образом.

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удаётся более просто вычислить интеграл другим способом.

4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Так называются дифференциалы вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где a, b - действительные числа, отличные от нуля, m, n, p – рациональные числа.

> ***Чебышёв*** *Пафнутий Львович* (1821 – 1894) — русский математик и механик, академик Петербургской АН. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

Как доказал П.Л.Чебышёв, первообразная для функции $x^m\left(a+bx^n\right)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях: