<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решение. Поскольку квадратный трёхчлен под знаком радикала имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, то применим 3-ю подстановку Эйлера:

$$\sqrt{1-2x-x^2} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right).$$

Переписав данное равенство в виде

$$\sqrt{-\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)} = t\left(x+1+\sqrt{2}\right),$$

возведём его в квадрат и сократим на $\left(x+1+\sqrt{2}\right)$. Выражая затем x через t, получим $x = \frac{-t^2\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}-1}{t^2+1}$, $\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}$, $1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1}$, $dx = -\frac{4\sqrt{2}tdt}{\left(t^2+1\right)^2}$. Таким образом, сводим исходный интеграл к интегралу от рациональной дроби

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -4\sqrt{2}\int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)\left(t^2+2\sqrt{2}t+1\right)},$$

который вычисляем стандартным образом.

Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую роль, на практике часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому к ним прибегают в крайних случаях, когда не удаётся более просто вычислить интеграл другим способом.

4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Так называются дифференциалы вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где a, b - действительные числа, отличные от нуля, m, n, p – рациональные числа.

> ***Чебышёв*** *Пафнутий Львович* (1821 – 1894) – русский математик и механик, академик Петербургской АН. Окончил Московский университет. Является основателем Петербургской математической школы. Занимался теорией приближения функций многочленами, интегральным исчислением, теорией чисел, теорией вероятностей, теорией машин и механизмов и пр.

Как доказал П.Л.Чебышёв, первообразная для функции $x^m\left(a+bx^n\right)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях:

а) p – целое; б) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое; в) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое.

Рассмотрим эти случаи.

а) Если p – целое, то полагают $t=\sqrt[s]{x}$, где s – общий (натуральный) знаменатель дробей m и n (см. интегрирование линейных иррациональностей).

Пример 1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Решение. Перепишем интеграл в виде $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$. Очевидно, что $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{3}$, $p=-2$, $a=b=1$. Положим $t=\sqrt[6]{x}$, тогда $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx=6t^5dt$ и в результате замены переменной интегрирования приходим к интегралу

$$6\int\frac{t^8dt}{\left(1+t^2\right)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3\left(t^2+1\right)+t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-$$

$$-18arctgt-6\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2},\text{ где }\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2}=-\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=$$

$=-\dfrac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\dfrac{1}{2}arctgt+C$. Следовательно, при $x\geq 0$ имеем

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21arctgt+C,\text{ где }t=\sqrt[6]{x}.$$

б) Если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое, то полагают $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s – знаменатель дроби p.

<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. *Решение*. Перепишем интеграл в виде $\int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$, откуда определяем $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $s=2$. Так как $\frac{m+1}{n}=3$ – целое, то положим $t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$. Тогда $x=\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$, $dx=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}2tdt$. Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C, \text{ где } t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}.$$

в) Если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то рекомендуемая подстановка $t=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s – знаменатель дроби p.

<u>*Пример 3*</u>. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Приведём интеграл к виду $\int x^0\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx$ и определяем $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$, $s=4$. Поскольку $\frac{m+1}{n}+p=0$ – целое, то положим, следуя рекомендации, $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$. Тогда $x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$, $dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt$, $\sqrt[4]{1+x^4}=t\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C,$$

где $t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$.