4.4. Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования

1. При интегрировании выражений, содержащих радикалы, иногда возможно использование известного приёма *домножения (с одновременным делением) на сопряжённое выражение.*

Пример 1. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \ (a>0)$.

Решение. На ОДЗ имеем $-a\le x<a$, и поэтому $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$.

Домножим и разделим подынтегральную дробь на выражение, сопряженное знаменателю. В результате интеграл удаётся свести к сумме двух более простых интегралов: $\int\frac{\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$

$$=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} \ (a\ne b)$.

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к знаменателю, т.е. на $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\int\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}{a-b}dx=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}dx-\int\sqrt{x+b}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}d(x+a)-\int\sqrt{x+b}d(x+b)\right)=$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(x+b)^{\frac{3}{2}}\right)+C \ \ (x\ge -a, x\ge -b).$$

2. В следующем примере используется приём *выделения полного квадрата* в подкоренном выражении.

Пример 3. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$.

Решение. Если заметить, что под знаком квадратного корня находится полный квадрат, то это позволяет избавиться от радикала и тем самым существенно упростить вычисление интеграла:

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C \ (x \neq 0).$$

3. Часто при интегрировании используются различные подстановки, в том числе нестандартные.

Пример 4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1 + x^2) + (1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} = d\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$. Тогда имеем $\int \frac{d\left(\sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} = \int \frac{d\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$. Положим $t = 1 + \sqrt{1 + x^2}$:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C.$$

Пример 5. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx \ (a > 0)$.

Решение. Согласно ОДЗ, $\frac{x}{2a - x} \geq 0 \iff x \in [0, 2a)$. Сделаем тригонометрическую подстановку вида $x = 2a\sin^2 t$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Приходим к интегралу

$$\int (2a\sin^2 t)\sqrt{\frac{2a\sin^2 t}{2a-2a\sin^2 t}}d(2a\sin^2 t)=8a^2\int \sin^4 t dt=$$

$$=8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt=8a^2\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cos^2 2t\right)dt=$$

$$=8a^2\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right)dt=a^2\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C.$$

Осталось сделать обратную подстановку. Очевидно, $\sin t=\sqrt{\frac{x}{2a}}$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}$, тогда $\sin 2t=2\sin t\cos t=$ $=2\cdot\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}$. Найдём $\cos 2t$: если $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ ($x\in[0,a)$), то $\cos 2t>0$ и $\cos 2t=\sqrt{1-\sin^2 2t}=\sqrt{1-\frac{x(2a-x)}{a^2}}=$ $=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x(2a-x)}=\frac{1}{a}\sqrt{(a-x)^2}=\frac{|a-x|}{a}=\frac{a-x}{a}$; если же $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $x\in[a,2a)$, то $\cos 2t\le 0$ и, следовательно, $\cos 2t=-\sqrt{1-\sin^2 2t}=-\frac{|a-x|}{a}=\frac{a-x}{a}$. Таким образом, $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos 2t=\frac{a-x}{a}$. Поэтому $\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=\frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)}\frac{a-x}{a}$.

Подставляя, получим для исходного интеграла: $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=$

$$=a^2\left(3\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{2}{a}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{1}{2a}\sqrt{x(2a-x)}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

<u>*Пример 6*</u>. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$, тогда $x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$.

Переходя к новой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^2}+$$
$$+C=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C \quad (x\ge 0).$$

К интегралам от квадратичных иррациональностей естественным образом примыкают интегралы от иррациональностей следующего вида:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx,$$
$$\int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+ex+r}\right)dx,$$

содержащие под знаком радикала многочлены 3-й и 4-й степеней (с действительными коэффициентами). Эти интегралы часто встречаются в приложениях и, вообще говоря, не являются элементарными функциями. Оба эти интеграла принято называть *эллиптическими* в тех случаях, когда они не выражаются через элементарные функции, и *псевдоэллиптическими* в тех случаях, когда они выражаются через элементарные функции (происхождение названия интегралов связано с тем, что впервые с этими интегралами столкнулись при решении задачи о вычислении длины дуги эллипса). Среди эллиптических интегралов особенно важную роль играют так называемые эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме *Лежандра*

$$F(k,\varphi)=\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad E(k,\varphi)=\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Для этих функций составлены обширные таблицы и графики. А.Лежандром и другими математиками изучены свойства данных функций и установлен ряд формул.

Наряду с элементарными функциями функции $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ прочно вошли в семейство функций, часто используемых в анализе.