

**Задачи для самостоятельного решения**

Найти неопределённые интегралы:

$$1. \int x\sqrt{x-2} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C \quad (x \geq 2).$$

$$2. \int x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} dx. \quad \text{Ответ: } -3\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{10}t^{10}\right) + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{1-x}.$$

$$3. \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C \quad (x > -4).$$

$$4. \int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}. \quad \text{Ответ: } -\sqrt{2}\arctg\sqrt{\frac{1-x}{2}} + C \quad (x < 1).$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx. \quad \text{Ответ: } \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\text{где } t = \sqrt{x+1} \quad (x > -1; x \neq 0).$$

$$6. \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}} - 1\right| + C \quad \left(x > -\frac{1}{2}; x \neq 0\right).$$

$$7. \int \frac{\sqrt[6]{2x-1} + 1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1} - 1)} dx.$$

$$\text{Ответ: } 3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1} - 1\right| - 3\ln\sqrt[6]{2x-1} + C \quad \left(x > \frac{1}{2}; x \neq 1\right).$$

$$8. \int \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}{(x+1)(4 - \sqrt[3]{x+1})} dx.$$

$$\text{Ответ: } -6t - 3\ln|4-t^2| - 6\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C, \text{ где } t = \sqrt[6]{x+1} \quad (x > -1; x \neq 63).$$

$$9. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$10. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{2t}{t^3-1},$$

$$\text{где } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \quad (x \neq 1).$$

$$11. \int x \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx \quad (x \notin (-2, 3]).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2x-1}{4} \sqrt{x^2-x-6} + \frac{35}{8} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x-6} \right| + 3\sqrt{x^2-x-6} + C.$$

$$12. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\text{где } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \quad (x \neq \pm 1).$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\text{где } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \quad (x \neq \pm 1).$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C \quad (x \notin [-2, 1]).$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C \quad (x \neq \pm 1).$$

$$16. \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{4} \ln \frac{x^3 \sqrt{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C \quad (x > 0).$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

$$\text{Ответ: } \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x} \right| + C \quad (x \notin [-2, 0]).$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x-1+\sqrt{x^2-2x+3} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+1}{2} + C \quad (x \in (-3, 1)).$$

$$20. \int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx.$$

$$\text{Ответ: } -5\sqrt{-x^2+4x+5} + 13 \arcsin \frac{x-2}{3} + C \quad (x \in (-1,5)).$$

$$21. \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx.$$

$$\text{Ответ: } 3\sqrt{x^2+x+2} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2} \right| + C.$$

$$22. \int \sqrt{x^2+4x+13} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x+2}{2} \sqrt{x^2+4x+13} + \frac{9}{2} \ln |x+2| + \sqrt{x^2+4x+13} + C.$$

$$23. \int \sqrt{5+4x-x^2} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x-2}{2} \sqrt{5+4x-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-2}{3} + C \quad (x \in (-1,5)).$$

$$24. \int x\sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \quad (|x| \leq 1).$$

$$25. \int (1-3x)\sqrt{1+x-x^2} dx \quad \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } (1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \left( x - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{16} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$26. \int (x+1)\sqrt{x^2+4x+1} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3}(x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+1} + \frac{3}{2} \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+1} \right| + C \quad (x \notin (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})).$$

$$27. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2x-3}{4} \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8} \ln \left( \frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x+1} \right) + C.$$

$$28. \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - 2x - 1}}.$$

$$\text{Ответ: } -\arcsin \frac{x+1}{x\sqrt{3}} + C \left( x \notin \left[ \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right] \right).$$

$$29. \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{x}{x+2}} + C \quad (x \notin [-2, 0]).$$

$$30. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\text{Ответ: } -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C \quad (x \neq -1).$$

$$31. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3(x-1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)} \right| + C \quad (x \neq 1).$$

$$32. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C \quad (x \neq 0).$$

$$33. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2x^2+1}{3x^3} \sqrt{x^2-1} + C \quad (|x| > 1).$$

$$34. \int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}} dx.$$

$$\text{Ответ: } -\left(\frac{x}{2} + 5\right) \sqrt{-x^2+4x} + 13 \arcsin \frac{x-2}{2} + C \quad (x \in (0, 4)).$$

$$35. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C \quad (x \neq 0).$$

$$36. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})).$$

$$\text{Ответ: } -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$37. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + C \quad (x \geq -1; x \neq 0).$$

$$38. \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1+x^5}} \quad (x \neq -1; 0).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{1+x^5}.$$

$$39. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (1+\sqrt{x})^2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}} + C \quad (x > 0).$$

$$40. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} (1+\sqrt[3]{x^2})}.$$

$$\text{Ответ: } 3 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + C \quad (x \neq 0).$$

$$41. \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x}+1)^{10}}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} + C \quad (x > 0).$$

$$42. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C \quad (x \neq 0).$$

$$43. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(\sqrt{1+x^3}-1)^2}{x^3} \right| + C \quad (x > -1; x \neq 0).$$

$$44. \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \left( x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln|x+\sqrt{x^2-1}| \right) + C \quad (x \geq 1).$$

$$45. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \quad (|x| < 1).$$

$$46. \int \frac{x dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} \quad (x \geq -2).$$

$$\text{Ответ: } -\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$47. \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} \quad (x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})). \quad \text{Ответ:}$$

$$\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}} \right| + C.$$

$$48. \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C \quad (x \neq \pm 1).$$

$$49. \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}. \quad \text{Ответ: } \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

$$50. \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} \quad \left( x \notin \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]; x \neq -1 \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| + C.$$

$$51. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t+1|^3} + C, \text{ где } t = x + \sqrt{x^2+x+1} \quad (x \neq -1).$$

$$52. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} \quad (x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]).$$

$$\text{Ответ: } \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C, \text{ где } t = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

$$53. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x - 2}} \quad (x \notin (-1, 2); x \neq -2).$$

$$\text{Ответ: } x - 2 \ln|x + 2| + \sqrt{x^2 - x - 2} - \frac{5}{2} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \right| - \\ - 2 \ln \left| \frac{1}{x + 2} - \frac{5}{8} + \sqrt{\frac{1}{(x + 2)^2} - \frac{5}{4(x + 2)} + \frac{1}{4}} \right| + C.$$

$$54. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x(1+x)})^2} \quad (x \notin (-1, 0)).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2(3-4t)}{5(1-t-t^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+1+2t}{\sqrt{5}-1-2t} \right| + C, \text{ где } t = -x + \sqrt{x(1+x)}.$$

$$55. \int \frac{x^4 - 5x^3 + 6x - 7}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 6 \right) \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \frac{53}{2} \ln|x + 1| + \\ + \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C \quad (x \neq -1).$$