§ 5.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При интегрировании тригонометрических функций наряду с алгебраическими преобразованиями эффективно используются всевозможные тригонометрические преобразования. Все интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны.

В простейших случаях интегралы вычисляются непосредственным сведением их к табличным. Но в большинстве случаев надо знать подходы и осознанно применять их там, где нужно. Рассмотрим отдельные классы интегралов от тригонометрических функций и общие рекомендации по их вычислению.

5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Здесь, как и прежде, под R понимается рациональная функция своих аргументов. Это достаточно широкий класс интегралов, если учесть, что tgx и $ctgx$ также выражаются через синус и косинус. Интегралы данного вида вычисляются следующими методами.

5.1.1. *Метод универсальной подстановки*

Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = tg\frac{x}{2}$ (или $t = ctg\frac{x}{2}$). Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и далее интегралы вычисляются соответствующими методами интегрирования рациональных дробей. Обратим ещё раз внимание на то, что применение подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $\pi + 2\pi n$, где $n \in Z$ $\left(-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n\right)$. В дальнейшем это подразумевается. К недостаткам этого подхода можно отнести тот факт, что универсальная подстановка во многих случаях приводит к сложным вычислениям. В частности, этим методом можно вычислять интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}.$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sin x + 2}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \text{, где } t = tg\frac{x}{2}.$$

Пример 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x(1 - \cos x)}$.

Решение. Положим $t = tg\frac{x}{2}$, тогда приходим к интегралу

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2tdt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2} - \int dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2} ctg\frac{x}{2} - \frac{1}{2} tg\frac{x}{2} + C.$$

В некоторых случаях вычисление интегралов данного типа может быть упрощено за счёт выбора других, более удачных, подстановок.

5.1.2. *Случай, когда* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, т.е. при всех x из области интегрирования верно $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$.

Пример 1. $\int tgxdx$.

Решение. $\int tgxdx = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$,

где $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right)$.

Пример 2. $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \right)$.

Решение. Заметив, что подынтегральная функция $\frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{1-2\sin^2 x}$ нечётна относительно $\sin x$, сделаем рекомендуемую подстановку $t = \cos x$. Тогда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $-\sin xdx = dt$, и получаем

$$\int \frac{(2-\cos^2 x)(-d\cos x)}{2\cos^2 x - 1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} = \int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} dt = \frac{t}{2} -$$

$$-\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C.$$

Пример 3. $\int \frac{\sin 2xdx}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7} \quad \left(x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \right)$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечётна относительно $\sin x$, то сделаем подстановку $t = \cos x$. Тогда получаем интеграл

$$\int \frac{-2tdt}{4\left(t^2 + 3t + \frac{9}{4}\right) - 16} = -\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{2}\int \frac{udu}{u^2 - 4} +$$

$$+\frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2 - 4} = -\frac{1}{4}\ln\left| \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4 \right| + \frac{3}{16}\ln\left| \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{7}{2}} \right| + C.$$

5.1.3. *Случай, когда* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т.е. при всех допустимых x верно равенство

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то рекомендуется подстановка $t = \sin x$.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция $\dfrac{(\cos^2 x + \cos^4 x)\cos x}{1 - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2}$ нечётна относительно косинуса x, то положим $t = \sin x$. Получим интеграл $(x \neq \pi n, n \in Z)$: $\displaystyle\int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)dt}{t^2 + t^4} =$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2}\right)dt = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6arctg(\sin x) + C.$$

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$.

Решение. Замечая, что подынтегральная функция нечётна относительно косинуса, положим $t = \sin x$:

$$\int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}dt - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1}dt =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1}{\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(arctg\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) + arctg\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)\right) + C.$$

5.1.4. *Случай, когда* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ чётна относительно синуса и косинуса, т.е. при всех допустимых x выполняется тождество

$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то к цели приводит подстановка $t=tgx$, $-\dfrac{\pi}{2}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ (или $t=ctgx$, $\pi n<x<\pi+\pi n$), где $n\in Z$. При этом $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $x=arctgt$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. В частности, этим способом можно вычислять тригонометрические интегралы вида $\displaystyle\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}$.

Пример 1. $\displaystyle\int tg^2xdx$.

Решение. $\displaystyle\int tg^2xdx=\int tg^2x\cdot\cos^2 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{tg^2x}{1+tg^2x}d(tgx)=$

$$=\int\frac{(tg^2x+1)-1}{1+tg^2x}d(tgx)=\int d(tgx)-\int\frac{d(tgx)}{1+tg^2x}=$$

$$=tgx-arctg(tgx)+C=tgx-x+C\quad\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in Z\right).$$

Однако проще было поступить следующим образом:

$$\int tg^2xdx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$$
$$=tgx-x+C.$$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x(tg^2x+2tgx-1)}=\int\frac{dtgx}{tg^2x+2tgx-1}=\int\frac{d(tgx+1)}{(tgx+1)^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C\ \left(tgx\neq-1\pm\sqrt{2}\right).$$

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}$.

Решение. Поделив одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, приходим к интегралу $(tgx \neq -1)$:

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{tgx\,d(tgx)}{1+tgx} = -\ln|1+tgx| + tgx + C .$$

<u>*Замечание*</u>. Любое рациональное выражение $R(u,v)$ аргументов u и v всегда можно представить в виде суммы трёх выражений, рассмотренных в пунктах 5.1.1–5.1.3:

$$R(u,v) = \frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}$$

или $R(u,v)=R_1(u,v)+R_2(u,v)+R_3(u,v)$, где функция $R_1(u,v)$ – нечётна относительно u, функция $R_2(u,v)$ – нечётна относительно v, а функция $R_3(u,v)$ – чётна относительно u и v. Поэтому мы рассмотрели весьма общий подход к интегрированию рациональных выражений от тригонометрических функций.

5.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$

5.2.1. *Интегралы вида* $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ $(n \in N)$

Эти интегралы можно вычислять, последовательно понижая степень с помощью соответствующих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \ \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4},$$

$$\sin^4 x = \frac{3-4\cos 2x + \cos 4x}{8}, \cos^4 x = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8} \text{ и др.}$$

Интегрированием по частям можно вывести общие формулы понижения степени для интегралов данного вида (см. пример 5).

<u>*Пример 1*</u>. $\int \sin^3 x dx$.

Решение. $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$.