5.3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, а также $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot \sin cx dx$ и др.

Эти интегралы находятся с помощью тригонометрических формул преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 1. $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Пример 2. $\int \sin 7x \sin 3x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 10x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

Пример 3. $\int \cos 3x \cos x dx$.

Решение. $\frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Пример 4. $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3} dx$.

Решение. Имеем $\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{3}dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6} + \sin\frac{5x}{6} + \sin\frac{7x}{6} - \sin\frac{11x}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6} + C.$$