5.4. Интегралы вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ $(n \in N)$

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ рассмотрены ниже в примерах 1 и 2. При $n > 2$ указанные интегралы вычисляются с помощью формул $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, которые последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

Пример 1. $\int tgxdx$.

Решение. $\int tgxdx = \int \dfrac{\sin xdx}{\cos x} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

Пример 2. $\int tg^2 xdx$.

Решение. $\int tg^2 xdx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$

Пример 3. $\int tg^7 xdx$.

Решение. $\int tg^5 x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int tg^5 xdtgx - \int tg^5 xdx =$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 xdtgx + \int tg^3 xdx =$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \int tgx \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x +$$

$$+ \int tgxdtgx - \int tgxdx = \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \int \frac{d\cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \ln|\cos x| + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right).$$