5.5. Интегралы вида $\int tg^n x \cdot \dfrac{dx}{\cos^m x}$, $\int ctg^n x \cdot \dfrac{dx}{\sin^m x}$, где $n \in R$, m – чётное натуральное число

Такие интегралы находятся аналогично рассмотренным в предыдущем пункте с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$$

с последующей заменой $t = tgx$ или, соответственно, $t = ctgx$.

<u>*Пример*</u>. $\int tg^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение. $\int tg^4 x \cdot \dfrac{dx}{\cos^6 x} = \int tg^4 x \cdot \left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(tgx) =$

$$= \int tg^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(tgx) = \int tg^4 x\left(1 + tg^2 x\right)^2 d(tgx) =$$

$$= \int tg^4 x d(tgx) + 2\int tg^6 x d(tgx) + \int tg^8 x d(tgx) =$$

$$= \frac{1}{5} tg^5 x + \frac{2}{7} tg^7 x + \frac{1}{9} tg^9 x + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

5.6. Интегралы вида $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x}$, $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ можно было бы сделать универсальную подстановку $t = tg\dfrac{x}{2}$. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента:

$$\frac{1}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi)},$$

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$