5.5. Интегралы вида $\int tg^n x \cdot \frac{dx}{\cos^m x}$, $\int ctg^n x \cdot \frac{dx}{\sin^m x}$, где $n \in R$, m – чётное натуральное число

Такие интегралы находятся аналогично рассмотренным в предыдущем пункте с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x \text{ и } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$$

с последующей заменой $t = tgx$ или, соответственно, $t = ctgx$.

<u>*Пример*</u>. $\int tg^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x}$.

Решение. $\int tg^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^6 x} = \int tg^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(tgx) =$

$$= \int tg^4 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 d(tgx) = \int tg^4 x(1 + tg^2 x)^2 d(tgx) =$$

$$= \int tg^4 x d(tgx) + 2\int tg^6 x d(tgx) + \int tg^8 x d(tgx) =$$

$$= \frac{1}{5} tg^5 x + \frac{2}{7} tg^7 x + \frac{1}{9} tg^9 x + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

5.6. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$, $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

1. При вычислении интегралов вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ можно было бы сделать универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию методом введения вспомогательного аргумента:

$$\frac{1}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)},$$

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

и положить далее $t = tg\frac{x+\varphi}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно, приходим к интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$ вычисляются универсальной подстановкой $t = tg\frac{x}{2}$. Тогда $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 1. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

Решение. _1-й способ_: $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{10}\sin(x+\varphi)}$, где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. Положим $t = tg\frac{x+\varphi}{2}$, тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right| + C,$$

где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\left(\sin(x+\varphi) \neq 0\right)$.

2-й способ: $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} =$

$$= \int \frac{dx}{(6tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2})\cos^2\frac{x}{2}} = -2\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg^2\frac{x}{2} - 6tg\frac{x}{2} - 1} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t - 3 - \sqrt{10}}{t - 3 + \sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{tg\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right| + C \quad \left(\sin(x + \varphi) \ne 0; \cos\frac{x}{2} \ne 0\right).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$.

Решение. Помимо метода универсальной подстановки, этот интеграл можно также вычислить следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 1} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = -tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + C,$$

где $x \ne -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

<u>*Пример 3*</u>. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

Решение. Применив универсальную подстановку $t = tg\frac{x}{2}$, придём к интегралу

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2t + 1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C \quad \left(x \ne \pi + 2\pi n, n \in Z\right).$$