5.7. Интегралы вида $\int\frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x}$

Для вычисления интеграла $(ac \neq 0)$ перейдём в нём к $d(tgx)$:

$$\int\frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c\cos^2 x} = \int\frac{dx}{(atg^2x + btgx + c)\cos^2 x} =$$

$$= \int\frac{d(tgx)}{atg^2x + btgx + c} = \int\frac{dt}{at^2 + bt + c},$$ где $t = tgx$. Таким образом, получили интеграл, вычисление которого рассматривалось в п.3.2.

Пример. $\int\frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2x + 2tgx - 1\right)} = \int\frac{dtgx}{tg^2x + 2tgx - 1} =$

$$= \int\frac{d(tgx+1)}{(tgx+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx + 1 - \sqrt{2}}{tgx + 1 + \sqrt{2}}\right| + C \quad \left(tgx \neq -1 \pm \sqrt{2}\right).$$

5.8. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, а также $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ $(a \neq b)$

Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ используется искусственный приём умножения и одновременного деления подынтегральной функции на одно и то же выражение $\sin(a-b)$ с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов $(\sin(x+a)\sin(x+b) \neq 0)$:

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx - \int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right) =$$