5.7. Интегралы вида $\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}$

Для вычисления интеграла $(ac\neq 0)$ перейдём в нём к $d(tgx)$:

$$\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}=\int\frac{dx}{(atg^2x+btgx+c)\cos^2 x}=$$

$=\int\frac{d(tgx)}{atg^2x+btgx+c}=\int\frac{dt}{at^2+bt+c}$, где $t=tgx$. Таким образом, получили интеграл, вычисление которого рассматривалось в п.3.2.

<u>*Пример*</u>. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2x+2tgx-1\right)}=\int\frac{dtgx}{tg^2x+2tgx-1}=$

$$=\int\frac{d(tgx+1)}{(tgx+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C\quad\left(tgx\neq-1\pm\sqrt{2}\right).$$

5.8. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, а также $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ $(a\neq b)$

Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ используется искусственный приём умножения и одновременного деления подынтегральной функции на одно и то же выражение $\sin(a-b)$ с последующим разбиением интеграла на разность двух интегралов $(\sin(x+a)\sin(x+b)\neq 0)$:

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}dx-\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C.$$

Аналогично вычисляется интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}=$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}dx-\int\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left(-\int\frac{d(\cos(x+a))}{\cos(x+a)}dx+\int\frac{d(\cos(x+b))}{\cos(x+b)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C.$$

Интегралы вида $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ с помощью формул приведения приводятся к одному из предыдущих видов, например

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x+b)\right)}=$$

$$=-\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin\left(x+(b-\frac{\pi}{2})\right)}\text{ и т.д.}$$

<u>*Пример*</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}$.

Решение. Преобразуем интеграл согласно приведённой выше схеме и вычислим его $(\sin(x-1)\cdot\cos x\neq 0)$:

$$\int\frac{dx}{\sin(x-1)\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}\int\frac{\sin\left((x-1)+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\frac{\sin(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=\frac{1}{\cos 1}\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cos 1}\left(-\ln|\cos x|+\ln|\sin(x-1)|\right)+C=\frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\cos x}\right|+C.$$

5.9. Интегралы вида $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$, $\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$, $\int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$ умножим и разделим подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользуемся тождествами $\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}$ и $\cos a=\cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\left(\left(\frac{x-a}{2}\right)-\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}+\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx=$$