$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)} \int \frac{\sin\left((x-1)+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{\cos 1} \int \frac{\sin(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{\cos 1} \int \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)} \right)dx = \frac{1}{\cos 1} \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos(x-1)}{\sin(x-1)} \right)dx =$$

$$= \frac{1}{\cos 1}\left(\int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin(x-1))}{\sin(x-1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cos 1}\left(-\ln|\cos x| + \ln|\sin(x-1)|\right) + C = \frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x-1)}{\cos x}\right| + C.$$

5.9. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$, $\int \frac{dx}{\sin x - \cos a}$

При вычислении интеграла $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$ умножим и разделим подынтегральную функцию на $\cos a$ и затем воспользуемся тождествами $\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}$ и $\cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right)$:

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2\cos a}\int \frac{\cos\left(\left(\frac{x-a}{2}\right)-\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2\cos a}\int \frac{\cos\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}+\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\cos a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)}{\cos\frac{x+a}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\right)+C = \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

$$(\cos a \neq 0, \sin x \neq \sin a).$$

При вычислении интеграла $\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$ поступаем аналогично: умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sin a$ и затем воспользуемся тождествами

$$\cos x-\cos a = -2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2} \text{ и } \sin a = \sin\left(\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right):$$

$$\int\frac{dx}{\cos x-\cos a} = -\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\left(\left(\frac{x-a}{2}\right)-\left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\sin a}\int\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}-\cos\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\sin a}\int\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}-\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}}-\int\frac{d\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin a}\cdot\left(\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\right)+C=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right|+C$$

$$(\sin a\neq 0,\cos x\neq\cos a).$$

Случай $\int\frac{dx}{\sin x-\cos a}$ приводится к одному из двух рассмотренных выше при помощи формул приведения:

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}\quad\text{или}\quad\int\frac{dx}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos a}.$$

<u>Пример</u>. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}$.

Решение. Имеем $\int\frac{dx}{\sin x-\sin 5}=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\left(\frac{x-5}{2}-\frac{x+5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\frac{\cos\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}+\sin\frac{x-5}{2}\sin\frac{x+5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}\cos\frac{x+5}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\cos 5}\int\left(\frac{\cos\frac{x-5}{2}}{\sin\frac{x-5}{2}}+\frac{\sin\frac{x+5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos 5}\left(\int\frac{d\left(\sin\frac{x-5}{2}\right)}{\sin\frac{x-5}{2}}-\int\frac{d\left(\cos\frac{x+5}{2}\right)}{\cos\frac{x+5}{2}}\right)=$$

$$= \frac{1}{\cos 5}\left(\ln\left|\sin\frac{x-5}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x+5}{2}\right|\right) + C = \frac{1}{\cos 5}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right| + C.$$

5.10. Интегралы вида $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$, $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx$, $\int\frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx$

1. При вычислении интегралов вида $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$ представим числитель $(a_1\sin x + b_1\cos x)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(a\sin x + b\cos x)$ и его производной $(a\cos x - b\sin x)$:

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

где A и B – постоянные. Найдём A и B методом неопределённых коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для нахождения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb \\ b_1 = Ab + Ba \end{cases}, \text{ откуда определяем } \begin{cases} A = \dfrac{a_1a + b_1b}{a^2 + b^2} \\ B = \dfrac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим $(a\sin x + b\cos x \neq 0)$:

$$\int\frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{a\sin x + b\cos x}dx =$$

$$= Ax + B\int\frac{(a\cos x - b\sin x)dx}{a\sin x + b\cos x} =$$

$$= Ax + B\int\frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x} = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx$.