$$= \frac{1}{\cos 5}\left(\ln\left|\sin\frac{x-5}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x+5}{2}\right| \right) + C = \frac{1}{\cos 5}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-5}{2}}{\cos\frac{x+5}{2}}\right| + C .$$

5.10. Интегралы вида $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$, $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx$, $\int\frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx$

1. При вычислении интегралов вида $\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$ представим числитель $(a_1\sin x + b_1\cos x)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(a\sin x + b\cos x)$ и его производной $(a\cos x - b\sin x)$:

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

где A и B – постоянные. Найдём A и B методом неопределённых коэффициентов. Два линейных тригонометрических многочлена относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому для нахождения коэффициентов имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb \\ b_1 = Ab + Ba \end{cases}, \text{ откуда определяем } \begin{cases} A = \dfrac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2} \\ B = \dfrac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Подставляя полученное разложение под знак интеграла, находим $(a\sin x + b\cos x \neq 0)$:

$$\int\frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{a\sin x + b\cos x}dx =$$

$$= Ax + B\int\frac{(a\cos x - b\sin x)dx}{a\sin x + b\cos x} =$$

$$= Ax + B\int\frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x} = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C .$$

<u>*Пример 1*</u>. $\int\frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в подынтегральной дроби в виде:

$$\sin x - 3\cos x = A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x).$$

Отсюда имеем систему $\begin{cases} 1 = 4A - 5B \\ -3 = 5A + 4B \end{cases}$, из которой находим $\begin{cases} A = -11/41 \\ B = -17/41. \end{cases}$

Подставляя найденные коэффициенты, получим: $\displaystyle\int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx =$

$$= -\frac{11}{41}\int dx - \frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x + 5\cos x)}{4\sin x + 5\cos x} = -\frac{11}{41}x - \frac{17}{41}\ln|4\sin x + 5\cos x| + C.$$

2. Аналогичный подход используется и при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx.$$

А именно, представим числитель дроби в виде:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + C,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin x, \cos x$ и свободные члены, находим

$$A = \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2 + b^2}, \; B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}, \; C = c_1 - Ac.$$

Подставляя в интеграл, окончательно получаем: $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx =$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

где последний интеграл вычисляется универсальной подстановкой

$$t = tg\frac{x}{2}, \; (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi, \; n \in Z.$$

<u>*Пример 2*</u>. $\displaystyle\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2}dx.$

Решение. Представим числитель $(2\sin x + \cos x - 1)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(\sin x - \cos x + 2)$, его производной $(\cos x + \sin x)$ и константы:

$$2\sin x + \cos x - 1 = A\,(\sin x - \cos x + 2) + B\,(\cos x + \sin x) + C.$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C получаем систему:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = -A + B \\ -1 = 2A + C \end{cases}, \text{ откуда } A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2},\ C = -2.$$

Поэтому имеем

$$\int \frac{2\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{3}{2} \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x + 2} dx -$$

$$-2 \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln\left|\sin x - \cos x + 2\right| -$$

$$-2 \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln\left|\sin x - \cos x + 2\right| - 4 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln\left|\sin x - \cos x + 2\right| - 2\sqrt{2} arctg \frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Этот же приём используется при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx.$$

Для этого запишем числитель дроби, стоящей под знаком интеграла, в виде следующей линейной комбинации

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x =$$
$$= (a \sin x + b \cos x)(A \cos x - B \sin x) + C\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и $\sin x \cos x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 = -aB + C \\ 2b_1 = aA - bB \\ c_1 = Ab + C \end{cases},$$

решая которую находим

$$A=\frac{b(c_1-a_1)+2ab_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{a(c_1-a_1)-2bb_1}{a^2+b^2},\ C=\frac{a_1b^2+c_1a^2-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в интеграл, получаем

$$\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},\ \text{где}\ a\sin x+b\cos x\neq 0.$$

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx$.

Решение. Представим числитель в виде:

$$2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x=(A\cos x-B\sin x)(\sin x-2\cos x)+$$
$$+C(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Для нахождения коэффициентов A,B и C имеем систему:

$$\begin{cases}2=-B+C\\3=A+2B\\5=-2A+C\end{cases},\ \text{откуда}\ A=-\frac{3}{5},\ B=\frac{9}{5},\ C=\frac{19}{5}.$$

Поэтому

$$\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{2dtg\frac{x}{2}}{2tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-2}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C\cdot$$