5.11. Интегрирование по частям

Часто в ситуациях, когда под знаком интеграла помимо тригонометрической функции находится функция другого типа (многочлен, логарифмическая или показательная функции и др.), для вычисления интеграла применяется метод интегрирования по частям.

Пример 1. $\int \cos^2\left(\sqrt{x}\right)dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x}$, откуда $x=t^2$, $dx=2tdt$. Тогда

$$I=\int \cos^2\left(\sqrt{x}\right)dx=2\int t\cos^2 tdt=\int t(1+\cos 2t)dt=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt.$$

Последний интеграл вычисляется интегрированием по частям.

$$I=\frac{t^2}{2}+\int t\cdot\cos tdt=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(2\sqrt{x}\right)+C\quad(x\ge 0).$$

Пример 2. $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение. $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}=\int\frac{xd(\sin x)}{\sin^3 x}=\int xd\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)=$

$$=-\frac{x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}ctgx+C\quad(x\ne\pi n, n\in Z).$$

Пример 3. $\int(2x^2-1)\cos 2xdx$.

Решение. Разобьём интеграл на два интеграла и проинтегрируем первый из них по частям

$$\int(2x^2-1)\cos 2xdx=2\int x^2\cos 2xdx-\int\cos 2xdx=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\cdot x^2-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2xdx\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=$$

$$=\sin 2x\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)-2\left(-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx\right)=$$

$$=\sin 2x\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C=$$

$$=\sin 2x\cdot\left(x^2-1\right)+x\cos 2x+C.$$

Пример 4. $\int x\cdot tg^2 x dx$.

Решение. $\int x\cdot tg^2 x dx = \int x d(tgx - x) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx =$

$$= x\cdot tgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \right).$$

Пример 5. $\int x\cdot tg^4 x dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям, положив $u = x, dv = tg^4 x dx$. В данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, поэтому, чтобы найти её, вычислим отдельно интеграл

$$\int tg^4 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) tg^2 x dx = \int tg^2 x d(tgx) - \int tg^2 x dx =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C_1.$$

Возьмём в качестве $v(x) = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x$ и продолжим интегрирование:

$$\int x\cdot tg^4 x dx = x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x \right) - \int \left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x \right) dx =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x \right) - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) tgx dx - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx \right) - \frac{1}{3}\int tgx d(tgx) - \frac{1}{3}\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx \right) - \frac{tg^2 x}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z \right).$$

5.12. Другие подстановки и подходы к интегрированию

В заключение параграфа рассмотрим примеры интегрирования тригонометрических функций достаточно общего вида, не укладывающихся ни в одну из рассмотренных выше стандартных схем. Для них применяются всё те же приёмы: разнообразные подстановки и преобразования подынтегральной функции.