Пример 4. $\int x\cdot tg^2 x dx$.

Решение. $\int x\cdot tg^2 x dx = \int x d(tgx - x) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx =$

$$= x\cdot tgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

Пример 5. $\int x\cdot tg^4 x dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям, положив $u = x, dv = tg^4 x dx$. В данном случае вид функции $v(x)$ не очевиден, поэтому, чтобы найти её, вычислим отдельно интеграл

$$\int tg^4 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tg^2 x dx = \int tg^2 x d(tgx) - \int tg^2 x dx =$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{tg^3 x}{3} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + C_1.$$

Возьмём в качестве $v(x) = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x$ и продолжим интегрирование:

$$\int x\cdot tg^4 x dx = x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) - \int \left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) dx =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x\right) - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) tgx dx - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx\right) - \frac{1}{3}\int tgx d(tgx) - \frac{1}{3}\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx\right) - \frac{tg^2 x}{6} - \frac{4}{3}\ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right).$$

5.12. Другие подстановки и подходы к интегрированию

В заключение параграфа рассмотрим примеры интегрирования тригонометрических функций достаточно общего вида, не укладывающихся ни в одну из рассмотренных выше стандартных схем. Для них применяются всё те же приёмы: разнообразные подстановки и преобразования подынтегральной функции.

1. *Понижение степени.* Иногда, если это не нарушает рациональности подынтегрального выражения в интегралах вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, полезно понизить степени $\sin x$ и $\cos x$, используя переход к кратным углам или иным способом.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Решение. Применяя формулы понижения степени $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, имеем $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}\left(1 + 3\cos^2 2x\right)$. Полагая $t = tg 2x$, находим $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} =$

$$= \int \frac{4dx}{1+3\cos^2 2x} = 2\int \frac{dt}{t^2+4} = arctg\frac{t}{2} + C = arctg\frac{tg 2x}{2} + C.$$

2. *Использование алгебраических и тригонометрических преобразований.*

Пример 2. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

Решение. Пользуясь тождеством $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}$, находим $\left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right)$:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{2}\int(\sin x + \cos x)dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

Пример 3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$.

Решение. Используя тождественные преобразования, получаем

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C.$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int\frac{\sin^5 x}{1-\cos x}dx$.

Решение. Если знаменатель дроби тригонометрического вида содержит выражение $1\pm\cos x$ ($1\pm\sin x$), то иногда бывает целесообразно одновременно домножить числитель и знаменатель этой дроби на выражение $1\mp\cos x$ (соответственно, $1\mp\sin x$), и затем упростить знаменатель по основному тригонометрическому тождеству.

$$\int\frac{\sin^5 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{\sin^5 x(1+\cos x)}{\sin^2 x}dx=\int\sin^3 x(1+\cos x)dx=\int\sin^3 xdx+$$

$$+\int\sin^3 xd(\sin x)=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx+\frac{\sin^4 x}{4}=$$

$$=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{\sin^4 x}{4}+C\ \ (x\neq 2\pi n, n\in Z).$$

3. *Использование нестандартных подстановок*

<u>*Пример 5*</u>. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1+4\sin x}}$.

Решение. Положим $t=\sqrt{1+4\sin x}$, тогда $t^2=1+4\sin x$, $\cos xdx=$ $=\frac{1}{2}tdt$ и получаем

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1+4\sin x}}=\frac{1}{2}\int dt=\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+C.$$

<u>*Пример 6*</u>. $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

Решение. Произведя подстановку $t=\sqrt{1+\cos x}$, находим

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=2\int\frac{dt}{t^2\left(t^2-2\right)}=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2-2}\right)dt,$$

где методом неопределённых коэффициентов находим $A=0,\ B=-1,$ $C=0,\ D=1$. Таким образом, имеем

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}+C\quad\left(x\neq\pi n,n\in Z\right).$$

<u>*Пример 7*</u>. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}dx$.

Решение. Произведём замену переменной интегрирования, полагая $t=\sqrt{tgx}$, где $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$. Тогда приходим к интегралу

$$\int(tgx)^{\frac{3}{2}}dx=\int\frac{2t^4}{1+t^4}dt=2t-2\int\frac{dt}{1+t^4}=$$

$$=2t-2\int\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right)dt=$$

$$=2t-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\sqrt{2}/2\right)^2+1/2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\sqrt{2}/2\right)^2+1/2}\right)=2t-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\left(t\sqrt{2}+1\right)+arctg\left(t\sqrt{2}-1\right)\right)+C,$$

где $t=\sqrt{tgx}$.

Пример 8. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Решение. Произведём подстановку $t=\cos^2 x$, тогда $-2\cos x \sin x dx = dt$, т.е. $\sin 2x dx = -dt$. Переходя к новой переменной, получаем

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int (tgx + ctgx)^2 dx$. Ответ: $tgx - ctgx + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z\right)$.

2. $\int \frac{dx}{\sin 3x}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{3x}{2}\right| + C \quad \left(x \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z\right)$.

3. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. Ответ: $tg\frac{x}{2} + C \quad (x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z)$.

4. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. Ответ: $\frac{2}{3} arctg\left(\frac{1}{3} tg\frac{x}{2}\right) + C$.

5. $\int \frac{dx}{3+\sin x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C \quad \left(x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right)$.

7. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{31}} arctg\frac{4tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{31}} + C$.

8. $\int \frac{dx}{2+\sin x + \cos x}$. Ответ: $\sqrt{2} arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C$.

9. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+6\cos x}}$. Ответ: $-\frac{1}{3}\sqrt{1+6\cos x} + C \quad \left(\cos x > -\frac{1}{6}\right)$.