

**Пример 8.**  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3 - \cos^4 x}}$ .

**Решение.** Произведём подстановку  $t = \cos^2 x$ , тогда  $-2 \cos x \sin x dx = dt$ , т.е.  $\sin 2x dx = -dt$ . Переходя к новой переменной, получаем

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3 - \cos^4 x}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{3 - t^2}} = -\arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C.$$

### Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1.  $\int (tgx + ctgx)^2 dx$ . Ответ:  $tgx - ctgx + C \left( x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z \right)$ .

2.  $\int \frac{dx}{\sin 3x}$ . Ответ:  $\frac{1}{3} \ln \left| tg \frac{3x}{2} \right| + C \left( x \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z \right)$ .

3.  $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$ . Ответ:  $tg \frac{x}{2} + C \left( x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z \right)$ .

4.  $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ . Ответ:  $\frac{2}{3} \arctg \left( \frac{1}{3} tg \frac{x}{2} \right) + C$ .

5.  $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$ . Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{3tg \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C$ .

6.  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ . Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| tg \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C \left( x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \right)$ .

7.  $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 6}$ . Ответ:  $\frac{2}{\sqrt{31}} \arctg \frac{4tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{31}} + C$ .

8.  $\int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$ . Ответ:  $\sqrt{2} \arctg \frac{tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{2}} + C$ .

9.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 6 \cos x}}$ . Ответ:  $-\frac{1}{3} \sqrt{1 + 6 \cos x} + C \left( \cos x > -\frac{1}{6} \right)$ .

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{tgx}} \quad (tgx > 0).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{t^2 - 1} + C, t = tgx.$$

$$11. \int \sin 3x \cos 2x dx.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C.$$

$$12. \int \cos 4x \cos 2x dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$13. \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.$$

$$14. \int \sin^3(2x) \cos^2(3x) dx.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3}{16} \cos 2x + \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}. \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C \left( x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin(x+1) \sin(x+7)}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{\sin 6} \ln \left| \frac{\sin(x+7)}{\sin(x+1)} \right| + C \quad (x+1 \neq \pi n; x+7 \neq \pi k, n, k \in \mathbb{Z}).$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos(x-1) \cos(x+2)}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{\sin 3} \ln \left| \frac{\cos(x+2)}{\cos(x-1)} \right| + C \left( x-1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; x+2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z} \right).$$

$$18. \int \frac{dx}{\sin x - \sin 4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\cos 4} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-4}{2}}{\cos \frac{x+4}{2}} \right| + C \quad (x-4 \neq 2\pi n; x+4 \neq \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}).$$

$$19. \int \frac{dx}{\cos x - \cos 3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sin 3} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-3}{2}}{\sin \frac{x+3}{2}} \right| + C \quad (x-3 \neq 2\pi n; x+3 \neq 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}).$$

$$20. \int \frac{dx}{\sin 5x - \cos 1} \quad \left( 5x \neq \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n; 5x \neq \frac{\pi}{2} + 1 + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5 \sin 1} \ln \left| \frac{\sin \frac{5x - \frac{\pi}{2} + 1}{2}}{\cos \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 1}{2}} \right| + C.$$

$$21. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

$$22. \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x} \quad \left( x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C.$$

$$24. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{ctg} x}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C \quad \left( x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n; x \neq \pi k, n, k \in \mathbb{Z} \right).$$

$$25. \int \sin^3 x \cos^3 x dx.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

$$26. \int \sin^6 x dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

$$27. \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$28. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx. \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{\sin x} - 2 \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C \left( x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$29. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$30. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \left( x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$31. \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^2 x} \left( x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{15}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$32. \int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} x}{\sqrt{7}} + C.$$

$$33. \int \frac{dx}{5 \cos^2 x + 9 \sin^2 x}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$34. \int \sin \sqrt{x} dx. \quad \text{Ответ: } -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \quad (x \geq 0).$$

$$35. \int x \sin^3 x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{3}{4} \sin x - \frac{3}{4} x \cos x - \frac{1}{36} \sin 3x + \frac{1}{12} x \cos 3x + C.$$

$$36. \int x^2 \cos x dx. \quad \text{Ответ: } x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C.$$

$$37. \int e^{2x} \sin(e^x) dx. \quad \text{Ответ: } \sin(e^x) - e^x \cos(e^x) + C.$$

$$38. \int (x+2) \cos(x^2 + 4x + 1) dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} \sin(x^2 + 4x + 1) + C.$$

$$39. \int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx. \quad \text{Ответ: } (x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x + C.$$

$$40. \int x \sin(x^2) dx. \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C.$$

$$41. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}. \quad \text{Ответ: } -x \operatorname{ctgx} + \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$42. \int \frac{x dx}{\sin^4 x}. \\ \text{Ответ: } \frac{1}{3} \left( -\frac{x \operatorname{ctgx}}{\sin^2 x} - \frac{1}{2 \sin^2 x} - 2x \operatorname{ctgx} + 2 \ln|\sin x| \right) + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$43. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - 4 \sin x + \cos^2 x}}. \quad \text{Ответ: } \arcsin \frac{\sin x + 2}{\sqrt{6}} + C \quad (\sin x < \sqrt{6} - 2).$$

$$44. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}. \quad \text{Ответ: } -2\sqrt{\operatorname{ctgx}} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C \quad (\sin 2x > 0).$$

$$45. \int \sqrt{\cos 2x} \sin x dx. \\ \text{Ответ: } -\frac{1}{2} \cos x \sqrt{\cos 2x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln|\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}| + C \quad (\cos 2x \geq 0).$$

$$46. \int \sqrt{\cos 2x} \cos x dx. \\ \text{Ответ: } \frac{1}{2} \sin x \sqrt{\cos 2x} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arcsin(\sqrt{2} \sin x) + C \quad (\cos 2x \geq 0).$$

$$47. \int \frac{1 + \sin x}{\cos x \sqrt{\cos 2x}} dx. \\ \text{Ответ: } \arcsin \frac{2 \sin x - 1}{\sqrt{2}(1 - \sin x)} + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \cos 2x > 0 \right).$$

$$48. \int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \sin^2 x}. \\ \text{Ответ: } x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right).$$

$$49. \int \frac{\sin x dx}{2 \sin x + 3 \cos x}. \\ \text{Ответ: } \frac{2}{13} x - \frac{3}{13} \ln|2 \sin x + 3 \cos x| + C \quad (2 \sin x + 3 \cos x \neq 0).$$

$$50. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3 \cos x + 2}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x - 2} \right| + C \quad (x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$51. \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} \quad (x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{ОТВЕТ: } -\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$52. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$53. \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} \quad \left( x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \sin x > 0 \right).$$

$$\text{ОТВЕТ: } -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} \right) + C.$$

$$54. \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$55. \int \frac{\sin x + \cos x + 1}{2 \sin x + \cos x + 2} dx \quad (2 \sin x + \cos x \neq -2; x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{3}{5} x + \frac{1}{5} \ln |2 \sin x + \cos x + 2| - \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} \right| + C.$$

$$56. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}} dx.$$

$$\text{ОТВЕТ: } -\ln(\cos^2 + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + C.$$