§ 6.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Интегрирование гиперболических функций

При интегрировании выражений, содержащих гиперболические функции, при необходимости выполнять преобразования над ними используются, в частности, следующие формулы:

основное гиперболическое тождество $ch^2 x - sh^2 x = 1$;

формулы двойного аргумента: $sh2x = 2 \cdot shx \cdot chx$, $ch2x = ch^2 x + sh^2 x$;

формулы $1 - th^2 x = \dfrac{1}{ch^2 x}$, $cth^2 x - 1 = \dfrac{1}{sh^2 x}$;

формулы понижения степени: $ch^2 x = \dfrac{ch2x + 1}{2}$, $sh^2 x = \dfrac{ch2x - 1}{2}$;

формулы суммы и разности двух аргументов:

$$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm shy \cdot chx, \quad ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy,$$

$$th(x \pm y) = \frac{thx \pm thy}{1 \pm thx \cdot thy}, \quad cth(x \pm y) = \frac{cthx \cdot cthy \pm 1}{cthy \pm cthx};$$

формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$shx \cdot chy = \frac{1}{2}\left(sh(x + y) + sh(x - y)\right),$$

$$chx \cdot chy = \frac{1}{2}\left(ch(x + y) + ch(x - y)\right),$$

$$shx \cdot shy = \frac{1}{2}\left(ch(x + y) - ch(x - y)\right) \text{ и пр.}$$

Подчеркнём, что большинство практических приёмов интегрирования подобного рода выражений имеют свои аналоги среди соответствующих приёмов, разработанных для тригонометрических функций. Так, интегралы от чётных степеней shx и chx находятся с помощью формул понижения степени $ch^2x = \dfrac{ch2x+1}{2}$, $sh^2x = \dfrac{ch2x-1}{2}$ и $shx \cdot chx = \ = \dfrac{sh2x}{2}$ Интегралы от нечётных степеней shx и chx находятся отделением множителя первой степени и введением новой переменной и т.д. Поэтому отдельно на них останавливаться не будем.

Обратим внимание на существующую связь между табличными интегралами ($a > 0$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ \left(|x| > a\right), \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ \left(|x| \neq a\right) \qquad (2)$$

и обратными гиперболическими функциями.

1. Известно, что обратной функцией к гиперболическому синусу $y = shx$ на множестве R является ареа-синус $y = Arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in R$. С учётом этого один из интегралов (1) можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = Arsh\frac{x}{a} + C.$$

2. Известно также, что обратными функциями к двум ветвям гиперболического косинуса $y = chx$, $x \geq 0$ и $y = chx$, $x \leq 0$ являются соответственно функции

$$y = Arch^{+}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{и} \quad y = Arch^{-}(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).$$

Обе эти функции, рассмотренные как две ветви двузначной функции, носят название ареа-косинуса и обозначаются $y = Archx = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$. С учётом этого получаем, что на промежутке $x > a$ второй из интегралов (1) принимает вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = Arch^{+}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

3. Наконец, при $|x| < 1$ определена функция, обратная к гиперболическому тангенсу и называемая *ареа-тангенсом* $y = Arthx = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; а на промежутках $|x|>1$ определена функция, обратная к гиперболическому котангенсу и называемая *ареа-котангенсом* $y = Arcthx = \ = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Учитывая это, получаем ещё одну форму записи для интеграла (2):

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}Arth\frac{x}{a}+C, & \text{если} \quad |x|<a \\ \frac{1}{a}Arcth\frac{x}{a}+C, & \text{если} \quad |x|>a. \end{cases}$$

Отметим, что к интегрированию гиперболических функций сводятся, в частности, интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \ \int R\left(x,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)dx, \ \int R\left(x,\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right)dx$$

подстановкой $x = a\cdot cht$, $t\ge 0$, а также интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$$

подстановкой $x = a\cdot sht$, $t\in R$.

<u>Пример 1</u>. $\int\frac{dx}{shx}$.

Решение. Преобразуя подынтегральное выражение, при $x\ne 0$ получаем (аналогично вычислению интеграла $\int\frac{dx}{\sin x}$):

$$\int\frac{dx}{shx} = \int\frac{dx}{2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}} = \int\frac{dx}{2th\frac{x}{2}ch^2\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(th\frac{x}{2}\right)}{th\frac{x}{2}} = \ln\left|th\frac{x}{2}\right|+C.$$

<u>Пример 2</u>. $\int sh^2xdx$.

Решение. Так как $sh^2x = \frac{ch2x-1}{2}$, то $\int sh^2xdx = \frac{1}{2}\int(cg2x-1)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int ch2xd(2x) - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{4}sh2x - \frac{x}{2}+C.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int sh^3 x dx$.

Решение. $\int sh^2 x \cdot shx dx = \int sh^2 x d(chx) = \int (ch^2 x - 1) d(chx) =$

$$= \frac{ch^3 x}{3} - chx + C.$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int ch^4 x dx$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, получаем $(x \neq 0)$

$$\int ch^4 x dx = \frac{1}{4}\int (1 + ch2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2ch2x + \frac{1 + ch4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2ch2x + \frac{1}{2}ch4x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + sh2x + \frac{1}{8}sh4x\right) + C \cdot$$

<u>*Пример 5*</u>. $\int cth^2 x dx$.

Решение. $\int \frac{ch^2 x}{sh^2 x} dx = \int \frac{1 + sh^2 x}{sh^2 x} dx = -cthx + x + C \quad (x \neq 0).$

<u>*Пример 6*</u>. $\int \frac{shx}{\sqrt{ch2x}} dx$. *Решение.*

$$\int \frac{shx}{\sqrt{ch2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}chx\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}chx\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}chx + \sqrt{ch2x}\right) + C.$$

<u>*Пример 7*</u>. $\int \frac{dx}{ch^2 x \cdot \sqrt[3]{th^2 x}} dx$. *Решение.*

$$\int \frac{dx}{ch^2 x \cdot \sqrt[3]{th^2 x}} dx = \int (thx)^{-\frac{2}{3}} d(thx) = 3 \cdot \sqrt[3]{thx} + C \quad (x \neq 0).$$

<u>*Пример 8*</u>. $\int chx \cdot ch3x dx$.

Решение. Используя формулу преобразования произведения гиперболических косинусов $ch\alpha \cdot ch\beta = \frac{1}{2}(ch(\alpha - \beta) + ch(\alpha + \beta))$, получим

$$\int chx \cdot ch3x dx = \frac{1}{2}\int (ch2x + ch4x) dx = \frac{1}{4}sh2x + \frac{1}{8}sh4x + C.$$

Пример 9. $\int sh x\cdot sh 2x\cdot sh 3x dx$.

Решение. Последовательно применяя формулы преобразования произведения гиперболических функций в суммы, получаем

$$\int sh x\cdot sh 2x\cdot sh 3x dx = \frac{1}{2}\int sh 2x\cdot(ch 4x - ch 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (sh 6x - sh 2x - sh 4x)dx = \frac{ch 6x}{24} - \frac{ch 4x}{16} - \frac{ch 2x}{8} + C.$$

Пример 10. $\int \frac{dx}{sh^2 x\cdot ch^2 x}$.

Решение. Пользуясь основным гиперболическим тождеством

$$ch^2 x - sh^2 x = 1,$$

представим единицу в числителе дроби как гиперболическую единицу:

$$\int \frac{dx}{sh^2 x\cdot ch^2 x} = \int \frac{ch^2 x - sh^2 x}{sh^2 x\cdot ch^2 x}dx = \int \frac{dx}{sh^2 x} - \int \frac{dx}{ch^2 x} =$$

$$= -cth x - th x + C\ (x \neq 0).$$

Пример 11. $\int \frac{sh x\cdot ch^3 x}{1 + ch^2 x}dx$.

Решение. $\int \frac{sh x\cdot ch^3 x}{1 + ch^2 x}dx = \int \frac{sh x\cdot ch x((ch^2 x + 1) - 1)}{1 + ch^2 x}dx$. Положим $t = 1 + ch^2 x$, откуда $dt = 2ch x\cdot sh x\cdot dx$. Значит, имеем

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t}dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}(1 + ch^2 x) - \frac{1}{2}\ln(1 + ch^2 x) + C.$$

Пример 12. $\int \sqrt{th x}dx$.

Решение. Положим $t = \sqrt{th x}$. Тогда $x = Arth(t^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1-t^2}$ ($|t| < 1$), $dx = \frac{2tdt}{1-t^4}$. Переходя к новой переменной, получим

$$\int \sqrt{th x}dx = 2\int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - arctg t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{th x}}{1-\sqrt{th x}}\right) - arctg\sqrt{th x} + C\ (x \geq 0).$$