6.2. Интегрирование показательных функций

Если подынтегральное выражение содержит показательную функцию, то либо этот интеграл сводится к табличному, либо следует подобрать соответствующую подстановку (внести подходящую функцию под знак дифференциала), либо проинтегрировать по частям.

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, где R – рациональная функция, с помощью подстановки $t = e^x$ преобразуется к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию к виду одной показательной функции (тем самым, сведя интеграл к табличному интегралу):

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\,dx = \int \left(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3\right)^x dx = \int 2250^x\,dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C.$$

Пример 2. $\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$.

Решение. Внесём функцию $\frac{1}{x^3}$ под знак дифференциала $\frac{dx}{x^3} = d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ и получим

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C \;(x \neq 0).$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Решение. Умножим одновременно числитель и знаменатель дроби на e^x, а затем внесём e^x под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = arctg(e^x) + C.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

Решение. Вынесем e^x из-под знака радикала и затем внесём e^{-x} под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\int \frac{d\left(e^{-x}\right)}{\sqrt{\left(e^{-x}\right)^2+1}} =$$

$$= -\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+C .$$

<u>Пример 5</u>. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\frac{dt}{t} =$

$$= \int \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)+$$

$$+\arcsin\frac{1}{t}+C = \ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-x}\right)+C \quad (x \geq 0).$$

<u>Пример 6</u>. $\int \frac{3e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-2e^x-3}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$. Тогда получаем интеграл $\int \frac{3t^2+t+1}{t\left(t^2-2t-3\right)}dt$. Так как $t\left(t^2-2t-3\right) = t(t+1)(t-3)$, то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3t^2+t+1}{t(t+1)(t-3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-3}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая тождественно многочлены в числителях, получим

$$3t^2+t+1 = A(t+1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t+1).$$

Если подставить $t = 0$, то находим $A = -\frac{1}{3}$; если же подставить $t = -1$, то получим $B = \frac{1}{2}$. Наконец, если положить $t = 3$, то найдём $C = \frac{31}{12}$. Подставляя найденное разложение под знак интеграла, получим

$$\int \frac{3e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}-2e^x-3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}+\frac{31}{12}\int \frac{dt}{t-3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln t+\frac{1}{2}\ln(t+1)+\frac{31}{12}\ln|t-3|+C = -\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right)+$$

$$+\frac{31}{12}\ln\left|e^x-3\right|+C\ \ (x\neq\ln 3).$$

<u>Пример 7</u>. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

Решение. Положим $t=e^{\frac{x}{6}}$, тогда

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int\frac{dt}{t\left(1+t+t^2+t^3\right)}=6\int\frac{dt}{t(1+t)\left(1+t^2\right)}=$$

$$=\int\frac{Adt}{t}+\int\frac{Bdt}{t+1}+\int\frac{Ct+D}{1+t^2}dt=\frac{Ax}{6}+B\ln\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)+$$

$$+\frac{C}{2}\ln\left(1+e^{\frac{x}{3}}\right)+Darctg\left(e^{\frac{x}{6}}\right)+C_1.$$

Методом неопределённых коэффициентов находим $A=6$, $B=C=D=$ $=-3$. Окончательно имеем

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=x-3\ln\left(\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right)-3arctg\left(e^{\frac{x}{6}}\right)+C_1\cdot$$

<u>Пример 8</u>. $\int x^3e^{3x}dx$.

Решение. Полагая $u=x^3, dv=e^{3x}dx$, проинтегрируем по частям:

$$I=\int x^3e^{3x}dx=\frac{x^3}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot\left(3x^2\right)dx=\frac{x^3}{3}e^{3x}-\int x^2e^{3x}dx.$$

Полагая теперь $u=x^2$, $dv=e^{3x}dx$, второй раз проинтегрируем по частям:

$$I=\frac{x^3}{3}e^{3x}-\left(\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot(2x)dx\right)=\left(x^3-x^2\right)\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx.$$

Наконец, полагая $u=x$, $dv=e^{3x}dx$, последний раз проинтегрируем по частям:

$$I=\left(x^3-x^2\right)\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=\left(x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}+C.$$