6.3. Интегрирование логарифмических функций

Если подынтегральное выражение содержит логарифмическую функцию, то так же, как и в случае с показательной функцией, интеграл либо сводится к табличному, либо берётся с помощью некоторой подстановки (функция вносится под знак дифференциала), либо интегрируется по частям.

<u>*Пример 1*</u>. $\int \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x, v = x$, получаем

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C \ (x > 0).$$

<u>*Пример 2*</u>. $\int \ln^2 x dx$.

Решение. Дважды интегрируя при $x > 0$ по частям, находим

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx =$$
$$= x \ln^2 x - 2 \ x \ln x + 2x + C.$$

<u>*Пример 3*</u>. $\int \ln^n x dx \ (n \in N)$.

Решение. Интегрируя по частям, получим рекуррентную формулу понижения степени для интегралов данного типа:

$$I_n = \int \ln^n x dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx = x \ln^n x - n \cdot I_{n-1}, \text{ где } I_0 = x.$$

Например, $I_1 = x \ln x - x + C$,

$$I_2 = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C,$$
$$I_3 = x \ln^3 x - 3 (x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)) + C \text{ и т.д. } (x > 0).$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Решение. Внесём $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C \ (x > 0).$$

Пример 5. $\int x^2 \ln x dx$.

Решение. Интегрируя по частям при $u = \ln x, dv = x^2 dx$, получим

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C \quad (x>0).$$

Пример 6. $\int \frac{dx}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)}$.

Решение. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{x\ln x} = d(\ln(\ln x))$, имеем при $x>1$:

$$\int \frac{dx}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

Пример 7. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$.

Решение. Заметим, что данный интеграл относится к группе интегралов вида $\int x^n \ln^m x dx \quad (n \in R, n \neq -1, m \in N)$, для которых существует рекуррентная формула понижения степени m:

$$\int x^n \ln^m x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x - \frac{m}{n+1}\int x^n \ln^{m-1} x dx,$$

по которой вычисление рассматриваемого интеграла сводится к вычислению интеграла такого же типа, но с меньшим на единицу показателем степени при $\ln x$. В данном случае $n=-3, m=3$. На практике держать в уме формулу не имеет большого смысла, проще три раза проинтегрировать по частям:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = \int \frac{1}{x^3}\cdot \ln^3 x dx = -\frac{1}{2x^2}\cdot \ln^3 x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^3}\cdot \ln^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot \ln^3 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot \ln^2 x + \int \frac{1}{x^3}\cdot \ln x dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot \ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\cdot \ln^2 x + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot \ln x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{4x^2}\left(\frac{2}{3}\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + \frac{1}{2}\right) + C \quad (x>0).$$

Пример 8. а) $\int \sin(\ln x)dx$; б) $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение. Интегрируя по частям каждый из интегралов, имеем

$$I_1 = \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - I_2$$

$$I_2 = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + I_1 .$$

Отсюда получаем, что $I_1 = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$,

$$I_2 = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C \quad (x > 0).$$

Замечание. Можно было бы найти эти интегралы, интегрируя последовательно каждый из них два раза по частям.

Пример 9. $\int x^x(1 + \ln x)dx$.

Решение. Положим $t = x^x$, тогда $dt = x^x(1 + \ln x)dx$ и для интеграла имеем:

$$\int x^x(1 + \ln x)dx = \int dt = t + C = x^x + C \quad (x > 0).$$

Пример 10. $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим $\displaystyle\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx =$

$$= \int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)d\left(\sqrt{1 + x^2}\right) = \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int dx =$$

$$= \sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - x + C .$$

Пример 11. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx$.

Решение. Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int \ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)dx = x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\int \frac{x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 + x^2}}dx =$$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)d\left(2\sqrt{1 + x^2}\right) =$$

$$= x\ln^2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + 2x + C .$$

<u>*Пример 12*</u>. $\int x\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)dx$.

Решение. Положим $t=\sqrt{x^2+1}$ и проинтегрируем по частям:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int t^2\ln\left(t^2-2\right)dt=\frac{1}{2}\int\ln\left(t^2-2\right)d\left(t^3/3\right)=$$

$$=\frac{1}{6}t^3\ln\left(t^2-2\right)-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}=\frac{1}{6}t^3\ln\left(t^2-2\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}+2t+\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)-$$

$$-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}+C\ \ \left(|x|>1\right).$$

<u>*Пример 13*</u>. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

Решение. Положим $x=tht$, тогда $t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ и интеграл примет вид

$$\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx=\int\frac{ath^2t+b}{th^2t-1}\cdot(-2t)\frac{dt}{ch^2t}=2\int\left(ath^2t+b\right)tdt=$$

$$=bt^2+2a\int t\cdot th^2tdt.$$

Последний интеграл вычисляем интегрированием по частям:

$$\int t\cdot th^2tdt=\int td\left(t-tht\right)=t\left(t-tht\right)-\int\left(t-tht\right)dt=t^2/2-t\cdot tht+$$

$+\ln|cht|+C$. Итак, $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx=bt^2+2a\,(t^2/2-t\cdot tht+$

$$+\ln cht)+C=\left(a+b\right)t^2-2at\cdot tht+2a\ln|cht|+C=$$

$$=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2-ax\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+2a\ln\left|ch(Arthx)\right|+C=$$

$$=\frac{a+b}{4}\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+a\left(x\ln\frac{1-x}{1+x}-\ln\left(1-x^2\right)\right)+C,$$

так как $ch\left(Arthx\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(|x|<1\right)$.