6.4. Интегрирование обратных тригонометрических функций

При интегрировании обратных тригонометрических функций используются всё те же общие приёмы интегрирование (преобразования, замена переменной, интегрирование по частям). Напомним, что интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin x dx\,,\ \int P(x)\arccos x dx\,,\ \int P(x) arctgx dx\,,\ \int P(x) arcctgx dx\,,$$

где $P(x)$ – целый алгебраический многочлен относительно x, вычисляются интегрированием по частям. При этом в качестве u выбираются функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4\cdot\arcsin^4 x}+C \ \left(0<|x|<1\right)$.

Пример 2. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

Решение. Полагая $t = arctg\sqrt{x}$, имеем $x = tg^2 t$, $dx = 2tgt\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$ и тогда

$$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{x+1} = \int\frac{t}{tgt}\cdot\frac{2tgt\cdot dt}{\cos^2 t\cdot\left(tg^2 t+1\right)} = 2\int tdt =$$

$$= t^2 + C = arctg^2\left(\sqrt{x}\right)+C \ \ (x>0).$$

Пример 3. $\int \arccos x dx$.

Решение. Интегрируя по частям и полагая $u=\arccos x$, $dv = dx$, определяем $du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$. Следовательно,

$$\int\arccos x dx = x\arccos x + \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos x -$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right) = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \ (|x| < 1).$$

<u>*Пример 4*</u>. $\int arctgxdx$.

Решение. Полагая $u = arctgx, dv = dx$, интегрируем по частям:

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

<u>*Пример 5*</u>. $\int arctg\sqrt{x}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int arctg\sqrt{x}dx = x\cdot arctg\sqrt{x} - \int\frac{xdx}{2\sqrt{x}(x+1)} = x\cdot arctg\sqrt{x} -$$

$$-\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}\right)dx = x\cdot arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int\frac{d(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2+1} =$$

$$= x\cdot arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C \ (x > 0).$$

<u>*Пример 6*</u>. $\int x^2 \arccos xdx$.

Решение. Положим $u = \arccos x$, $x^2dx = dv$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int x^2\arccos xdx = \int\arccos xd\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Образовавшийся в правой части интеграл ещё раз проинтегрируем по частям, положив на этот раз $u = x^2$, $dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| \le 1)$:

$$\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} +$$

$$+\frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}d(x^2) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

<u>*Пример 7*</u>. $\int(\arcsin x)^2dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим $\int(\arcsin x)^2dx =$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \arcsin x dx = x\cdot(\arcsin x)^2 +$$

$$+2\int \arcsin x \cdot d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x -$$

$$-2x + C \quad (|x|<1).$$

<u>Пример 8</u>. $\int \frac{arctgx}{x^3}dx$.

Решение. Интегрируя по частям, положим $u = arctgx, \frac{dx}{x^3} = dv$. Тогда $u' = \frac{1}{x^2+1}$, $v = -\frac{1}{2x^2}$ и имеем

$$\int \frac{arctgx}{x^3}dx = \int arctgx d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) =$$

$$= arctgx\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2x^2}arctgx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2x^2}arctgx + \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)}dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}arctgx + \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x^2+1}\right) = -\frac{1}{2x^2}arctgx +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - arctgx\right) + C = -\frac{1}{2}arctgx\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \frac{1}{2x} + C \quad (x \neq 0).$$

<u>Пример 9</u>. $\int x\cdot \arcsin(1-x)dx$.

Решение. Применяя простейшие преобразования, замену $u = 1-x$ и интегрирование по частям, находим $\int x\cdot\arcsin(1-x)dx =$

$$= \int(1-x)\arcsin(1-x)d(1-x) - \int \arcsin(1-x)d(1-x) =$$

$$= \int u\arcsin u du - \int \arcsin u du = \frac{u^2}{2}\arcsin u - \frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} -$$

$$-u\arcsin u + \int\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{u^2}{2}\arcsin u - \frac{1}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} -$$

$-u\arcsin u-\sqrt{1-u^2}$. Интеграл $\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}$ вычислим тригонометрической подстановкой $u=\sin t$, где $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\sin^2 tdt=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin u-\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}+C_1.$$

Окончательно имеем

$$\int x\cdot\arcsin(1-x)dx=\frac{u^2}{2}\arcsin u-u\arcsin u-\sqrt{1-u^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin u-\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}\right)+C=\frac{1}{2}\arcsin u\cdot\left(u^2-2u-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\sqrt{1-u^2}\left(1-\frac{u}{4}\right)+C=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)-\sqrt{2x-x^2}\cdot\frac{x+3}{4}+C$$

$$(x\in(0,2)).$$

<u>*Пример 10*</u>. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Положим $t=\arcsin x$, разобьём интеграл на сумму двух интегралов и затем один из них проинтегрируем по частям $(0<|x|<1)$:

$$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{t}{\sin^2 t}\cdot\frac{1+\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt=$$

$$=\int\frac{t}{\sin^2 t}\left(1+\sin^2 t\right)dt=\frac{t^2}{2}+\int\frac{tdt}{\sin^2 t}=\frac{t^2}{2}-\int td(ctgt)=$$

$$=\frac{t^2}{2}-t\cdot ctgt+\ln|\sin t|+C=\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\arcsin x\cdot\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)}+$$

$$+\ln|\sin(\arcsin x)|+C=\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\arcsin x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln|x|+C.$$

<u>*Пример 11*</u>. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \cdot arctgxdx$.

Решение. Положим $t = arctgx$, тогда $x = tgt$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \cdot arctgxdx = \int t\left(atg^2t + b\right)dt = \frac{bt^2}{2} + a\int t \cdot tg^2tdt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\int t \cdot tg^2tdt = \int td\left(tgt - t\right) = t\left(tgt - t\right) - \int\left(tgt - t\right)dt = t \cdot tgt - \frac{t^2}{2} +$$

$$+\ln\left|\cos t\right| + C.$$

Подставляя, окончательно получим

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \cdot arctgxdx = \frac{bt^2}{2} + a\ (t \cdot tgt - \frac{t^2}{2} + \ln\left|\cos t\right|) + C =$$

$$= \frac{b-a}{2}\ t^2 + at \cdot tgt + a\ln\left|\cos t\right| + C = \frac{b-a}{2}\ arctg^2x +$$

$$+ax \cdot arctgx + a\ln\left|\cos\left(arctgx\right)\right| + C = \frac{b-a}{2}\ arctg^2x + ax \cdot arctgx -$$

$$-\frac{1}{2}a\ln\left(1+x^2\right) + C \text{ (так как } \cos\left(arctgx\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{).}$$

<u>*Пример 12*</u>. $\int \frac{\arcsin\left(e^x\right)}{e^x}dx$.

Решение. Положим $t = e^x$, тогда $\int \frac{\arcsin\left(e^x\right)}{e^x}dx = \int \frac{\arcsin t}{t^2}dt =$

$$= -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} + C =$$

$$= -e^{-x}\arcsin\left(e^x\right) - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right) + x + C \quad \left(x<0\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int sh^2xch^2xdx$. Ответ: $\frac{1}{32}sh4x - \frac{1}{8}x + C$.